Теория вычислительных процессов и структур

Лекция №11. Композициональные сети Петри

Содержание лекции

Точки доступа к сети Петри
Точки доступа

Вспомогательные операции над сетями
Операция слияния переходов
Операция слияния мест

Точки доступа I

Композициональный подход к построению сетей Петри предполагает возможность построения более сложных сетей из менее сложных составляющих. Для использования какой-либо сети в качестве составляющей необходима дополнительная информация о том, каким образом сеть может быть использована. Например, для того, чтобы одну сеть синхронизировать с другой посредством параллельной композиции необходимо иметь информацию о том – какие именно переходы необходимо синхронизировать и каким образом. Если же необходимо использовать сеть для последовательной композиции, то необходима информация о начальном и конечном состояниях сети. Следует отметить, что эта дополнительная информация используется только для композиции и после завершения построения всей сети надобность в ней обычно отпадает.

В данном разделе вводятся понятия точек доступа, формализующие эту дополнительную информацию. Само название — точка доступа к сети — выбрано с целью указания на то обстоятельство, что только через эти объекты можно получить доступ к сети с целью ее композиции. Вводятся два типа точек доступа — t-точки и s-точки,

Точки доступа II

соответствующие двум типам композиций. Один тип композиции определяется через слияние переходов сетей (t-точка), а второй через слияние мест (s-точка).

T-точка доступа I

Definition

Т-точка доступа

Пусть задана сеть $N = \langle S, T, F \rangle$ и некоторый алфавит *Alph*.
Т-точкой доступа называется набор $\alpha = \langle tid, Alph, \sigma \rangle$ где

1. *tid* — *имя* (идентификатор) t-точки доступа;
2. *Alph* — некоторый *алфавит*;
3. $\sigma : T \to \mu Alph \ \cup \ \{\tau\}$ – *пометочная функция*, где $\tau \notin Alph \cup \mu Alph$.

Запись $\mu Alph$ обозначает множество всех конечных и непустых мультимножеств, определенных на множестве *Alph*.
Таким образом t-точка доступа есть ничто иное как пометка сети Петри, которая каждому переходу сопоставляет непустое мультимножество символов из алфавита *Alph* либо символ τ.
Переход, помеченный символом τ (τ – переход), играет роль невидимого, внутреннего события для этой точки доступа. С формальной точки зрения для обозначения невидимого действия удобнее было бы использовать пустое множество **0**. Однако в

T-точка доступа II

литературе по сетям Петри укоренился обычай обозначать такое действие именно символом τ, что далее и будет делаться. Можно также считать, что символ τ просто является обозначением пустого мультимножества $\mathbf{0}$. Это позволяет, например, писать $x + \tau = x, \tau + \tau = \tau$, и.т.д. Дополнительно, t-точка доступа содержит имя *tid*, идентифицирующее эту точку, что необходимо для ссылок на эту точку, т.к. их у одной сети может быть несколько.

S-точка доступа I

Definition

S-точка доступа

Пусть задана сеть $N = \langle S, T, F \rangle$. Тогда s-точкой доступа сети N называется набор $\xi = \langle sid, \rho \rangle$, где

1. sid – имя (идентификатор) s-точки доступа;
2. $\rho \subseteq \mu S$ – множество такое, что $\forall M, M' \in \rho : M \leq M' \Rightarrow M = M'$

Иными словами s-точка доступа это некоторое множество мультимножеств на S таких, что эти мультимножества взаимно не сравнимы между собой по отношению к вложенности. Интуитивно s-точку доступа можно представить как множество маркировок, достижение одной из которых является “видимым"событием и, следовательно, делает возможным взаимодействие через эту точку. Это делает понятным требование несравнимости маркировок одной и той же точки доступа, позволяя более корректно определить синхронизацию. Понятие s-точки доступа можно понимать как обобщение понятия маркировки, задающее не одну, а сразу несколько взаимно альтернативных маркировок. В частности s-точка

S-точка доступа II

доступа, соответствующая начальной маркировке, определяет не одну начальную маркировку, а несколько. Это означает, что сеть может начать функционировать, стартовав из одной из этих маркировок, причем выбор недетерминирован. Другим типичным примером s-точки доступа является множество терминальных маркировок, достижение которых свидетельствует об успешном завершении работы сети. Этот случай более привычен, т.к. часто выполнение сети может заканчиваться несколькими способами. В силу этих причин далее элементы s-точек доступа будут обозначаться буквой M, возможно с индексами.

Имя s-точки доступа *sid* необходимо для того, чтобы идентифицировать точку доступа, т.к. для одной сети обычно будет определятся несколько s-точек.

Пример сети с точками доступа I

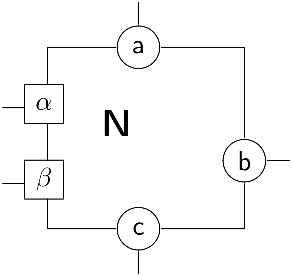


Рис.: Сеть с точками доступа

Пример сети с точками доступа II

Сеть с точками доступа обоих типов может быть схематически изображена в виде прямоугольника, в котором t- и s-точки доступа представляются соответственно в виде кружочков и квадратиков, расположенных по периметру прямоугольника, см. Рис.1. Как будет показано далее, схематическое представление сети Петри с точками доступа имеет важное значение, т.к. позволяет специфицировать сложные сети на более абстрактном уровне. Далее для обозначения t-точек доступа будут использоваться греческие буквы α, β, а для s-точек — ξ, ζ, возможно с индексами.

Вспомогательные операции над сетями I

В данном разделе вводится две вспомогательные операции над сетями Петри. Несмотря на то, что эти операции имеют довольно ясный интуитивный смысл, их формальные определения довольно громоздки и сложны. В то же время этот набор операций позволяет достаточно просто и компактно определять исчисление сетей, ориентированное на работу с протоколами.

Операция слияния переходов I

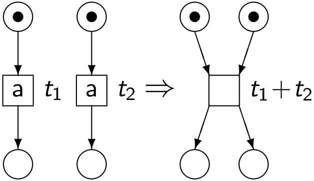
Практически все известные исчисления и алгебры сетей Петри содержат операцию параллельной композиции, т.к. только она позволяет порождать и описывать параллельность и синхронизацию процессов. Несмотря на то, что известно множество способов определения этой операции, все они имеют нечто общее, а именно, в их основе лежит базовая операция слияния переходов. В настоящем разделе эта базовая операция определяется в рамках принятых понятий точек доступа.

Перед тем как давать формальное определение операции приводится ее содержательная характеризация с использованием последовательности примеров возрастающей сложности. Пусть даны две сети N_1 и N_2 с t-точками доступа α_1 и α_2, соответственно. Слияние переходов сетей N_1 и N_2 через точками α_1 и α_2 объединяет сети в одну сеть так, что сети N_1 и N_2 синхронизируются следующим образом. Если в сети N_1 возбужден переход t_1 с именем $\sigma_1(t_1) = a \neq \tau$, то он может сработать только тогда, когда в сети N_2 возбужден некий переход t_2 с тем же именем $\sigma_2(t_2) = a \neq \tau$. На Рис.2.а приведен пример такой простейшей синхронизации, где два перехода t_1 и t_2, имеющие одно и то же имя a, сливаются в один

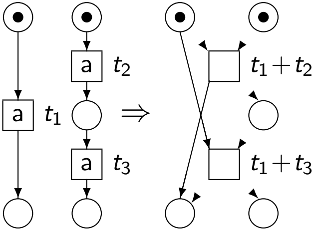
Операция слияния переходов II

новый переход синхронизации, обозначенный суммой $t_1 + t_2$. Если в сетях N_1 и N_2 есть по несколько переходов, помеченных одним и тем же символом, то порождается произведение множеств, дающее все возможные случаи синхронизации, см. Рис.2.(ii).

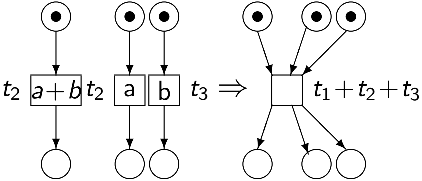
Операция слияния переходов III



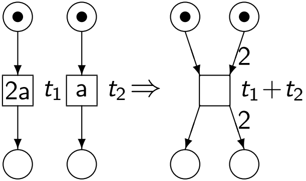
(i)



(ii)



(iii)



(iv)

Операция слияния переходов IV

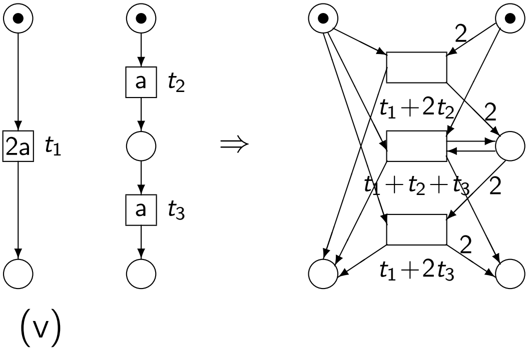
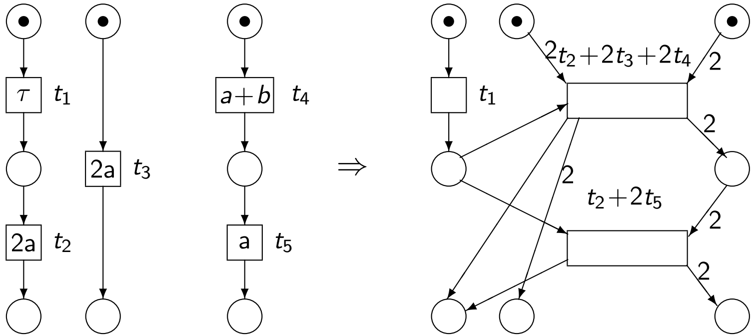


Рис.: Примеры операции слияния переходов (продолжение следует)

Операция слияния переходов V



(vi)

Рис.2 Примеры операции слияния переходов (продолжение)

Операция слияния переходов VI

Если переход t_1 в сети N_1 в точке α_1 помечен не одним символом, а мультимножеством символов, то он может сработать тогда и только тогда, когда в сети N_2 возбуждено мультимножество переходов (шаг) $\Theta_2 \in \mu T_2$, суммарная пометка которых в точке α_2 равна пометке в t_1, т.е. $\sigma_1(t_1) = \sigma_2(\Theta_2)$. На Рис.2.(iii) приведен пример такого случая синхронизации. Здесь переход t_1 сливается с двумя переходами t_2 и t_3, т.к. $\sigma(t_1) = \sigma_2(t_2 + t_3) = a + b$. На Рис.2.(iv) приведен пример, когда переход t_1 имеет пометку $\sigma_1(t_1) = 2a$. В этом случае срабатывание перехода t_1 возможно только тогда, когда в сети N_2 сработает шаг $\Theta_2 = 2t_2$, т.к. $\sigma_1(t_1) = \sigma_2(t_2) = 2a$, т.е. дважды сработает переход t_2, что достигается установкой кратности соответствующей дуги. На Рис.2.(v) приведен недетерминированный случай, когда существует несколько возможностей синхронизации перехода t_1 с переходами сети N_2. Здесь, как нетрудно видеть, существует три возможных способа синхронизации. Срабатыванию перехода t_1 может соответствовать двойное срабатывание переходов t_2 или t_3. Кроме того возможен случай, когда срабатыванию перехода t_1 соответствует одновременное срабатывание переходов t_2 и t_3, т.к. $\sigma(t_1) = \sigma_2(t_2 + t_3) = 2a$.

Операция слияния переходов VII

В общем случае, если в сети N_1 возбужден шаг $\Theta_1 \in \mu T_1$ а в сети N_2 шаг $\Theta_2 \in \mu T_2$, причем Θ_1 и Θ_2 имеют одинаковую пометку без τ символов: $\tau \notin \sigma_1(\Theta_1) = \sigma_2(\Theta_2)$, то тогда такие шаги могут синхронизироваться, сливаясь в один новый переход $\Theta_1 + \Theta_2$. На Рис.2.(vi) приведен такой случай. Здесь можно найти две возможности синхронизации, реализующиеся в двух переходах $\Theta = \Theta_1 + \Theta_2 = t_2 + 2t_3 + 2t_4$ и $\Theta' = \Theta_1' + \Theta_2' = t_2 + 2t_5$. Позднее в этом разделе будет показано как вычислять все возможные случаи синхронизации. Заметим, что τ -переход t_1 не участвует в синхронизации и поэтому не изменяется.
Выше были рассмотрены случаи синхронизации слиянием переходов для случая двух сетей. Основываясь на этом случае, нетрудно определить операцию слияния переходов для одной сети с помощью двух t-точек доступа. Действительно, все предыдущие примеры и рассуждения могут быть практически без изменений повторены применительно к одной сети. На Рис.3 приведен еще один пример, более характерный для унарной версии операции слияния переходов. Изображенная сети имеет две t-точки доступа α_1 и α_2. Имена переходов, относящиеся α_1, изображены слева от перехода, а

Операция слияния переходов VIII

относящиеся к α_2 — справа. Здесь переход t_4 синхронизируется с передом t_2 и переходом t_3.

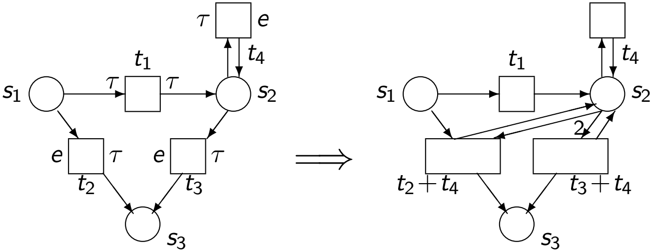


Рис.: Пример унарной операции слияния переходов

Руководствуясь исключительно техническими соображениями более удобно сначала дать формальное определение операции слияния переходов в унарной форме, а затем на ее основе — бинарной.

Операция слияния переходов. Унарная форма I

Definition

Операция слияния переходов. Унарная форма

Пусть задана сеть $N = \langle S, T, F \rangle$ и ее t-точки доступа $\alpha_1 = \langle tid_1, Alph_1, \sigma_1 \rangle, \alpha_2 = \langle tid_2, Alph_2, \sigma_2 \rangle$. Тогда операция слияния переходов (t-слияние) сети N по отношению к точкам α_1 и α_2 строит новую сеть $N' = \langle S', T', F' \rangle = tmerg(N, \alpha_1, \alpha_2)$ так, что

1. $S' = S$
2. $T' = (T \backslash T_{aut}) \;\cup\; T_{syn}$, где
   - 2.1 $T_{syn} = \{\Theta_1 + \Theta_2 \;\big|\; \Theta_1, \Theta_2 \in \mu T, \tau \notin \sigma_1(\Theta_1) = \sigma_2(\Theta_2),$ сумма $\Theta_1 + \Theta_2$ *минимальна* $\}$
   - 2.2 $T_{aut} = \{t \in T \mid \sigma_1(t) \neq \tau \vee \sigma_2(t) \neq \tau\}$
3. $F' = F \;\setminus\; \{\langle {}^\bullet t, t, t^\bullet \rangle \mid t \in T_{aut}\} \;\cup\; \{\langle {}^\bullet\Theta, \Theta, \Theta^\bullet \rangle \mid \Theta \in T_{syn}\}$.

Сумма $\Theta_1 + \Theta_2$ называется *минимальной* если не существует $\Theta'_1, \Theta'_2 \in \mu T : \tau \notin \sigma_1(\Theta'_1) = \sigma_2(\Theta'_2)$ и $\Theta'_1 + \Theta'_2 < \Theta_1 + \Theta_2$.

Таким образом операция слияния переходов не меняет множество мест сети. С множеством переходов, однако, происходят существенные преобразования. Во-первых, из него удаляется

Операция слияния переходов. Унарная форма II

подмножество переходов, видимых хотя бы из одной точки α_1 или α_2, T_{aut}, т.к. эти переходы должны участвовать в синхронизации и не могут срабатывать автономно. При этом множество невидимых сразу их обеих точек переходов остается без изменений. Во-вторых, добавляется новое множество переходов синхронизации T_{syn}.

Каждый такой переход формируется с помощью мультимножества синхронизирующихся переходов и задается формальной суммой $\Theta_1 + \Theta_2$. Невидимые переходы не могут участвовать в синхронизации и, следовательно, не дают вклад в множество синхронизируемых переходов.

Следует отметить, что видимые переходы, которые не участвуют в синхронизации, так же удаляются. Это правило отражает фундаментальное требование: каждый помеченный переход либо *должен* синхронизироваться, либо он не выполним.

Условия конечности и минимальности $\Theta_1 + \Theta_2$ весьма существенны так, например, не существует перехода синхронизации, задаваемое конечным мультимножеством, для сети, изображенной на Рис.4. Требование минимальности суммы $\Theta_1 + \Theta_2$ свидетельствует об элементарности события синхронизации. В частности, оно

Операция слияния переходов. Унарная форма III

гарантирует конечность множества переходов синхронизации. Действительно, если бы этого требования не было, то слияние переходов сети на Рис.2(i) дало бы бесконечное множество

$$T_{syn} = \{t_1 + t_2, 2t_1 + 2t_2, 3t_1 + 3t_2, 4t_1 + 4t_2, \dots\}.$$

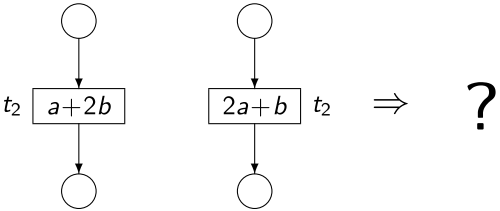


Рис.: Пример некорректной синхронизации

Операция слияния переходов. Унарная форма IV

Входные и выходные места перехода синхронизации формируется как сумма соответственно входных и выходных мест составляющих переходов.
На основе определения унарной операции слияния переходов нетрудно построить ее бинарную версию, которая часто бывает более удобной и более естественной в применениях.

Операция слияния переходов. Бинарная форма I

Definition

Операция слияния переходов. Бинарная форма
Пусть заданы сети $N_1 = \langle S_1, T_1, F_1 \rangle$, $N_2 = \langle S_2, T_2, F_2 \rangle$ с t-точками доступа α_1 и α_2, соответственно. Тогда операция t-слияния сетей $N_1 = \langle S_1, T_1, F_1 \rangle$ и $N_2 = \langle S_2, T_2, F_2 \rangle$ через α_1 и α_2 строит новую сеть

$$N = (N_1 \ {}_{\alpha}|_{\beta} \ N_2) = tmerg(N_1 \uplus N_2, \alpha_1, \alpha_2)$$

На Рис.5 приведено схематическое изображение операции t-слияния.

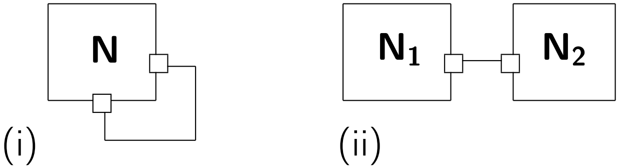


Рис.: Схематическое изображение операции t-слияния: унарная (a) и бинарная (b) формы

Вычисление множества переходов синхронизации I

Для применения операции слияния переходов на практике необходимо уметь вычислять множества переходов синхронизации T_{syn}. Как оказывается, это действительно можно сделать, причем эта задача сводится к хорошо известной проблеме поиска инвариантов сетей Петри, широко представленной в литературе.

Теорема. Вычисление множества переходов синхронизации Проблема нахождения переходов синхронизации для операции слияния переходов сетей сводится к проблеме нахождения множества наименьших t-инвариантов в сетях Петри.

Доказательство. Пусть $\alpha_1 = \langle tid_1, Alph_1, \sigma_1 \rangle$ и $\alpha_2 = \langle tid_2, Alph_2, \sigma_2 \rangle$ две точки доступа сети $N = \langle S, T, F \rangle$. Построим вспомогательную маркированную сеть Петри $N^s = \langle S^s, T^s, F^s, M_0^s \rangle$, где

- $S^s = Alph_1 \cup Alph_2$
- $T^s = T \setminus \{t \in T \mid \sigma_1(t) = \sigma_2(t) = \tau\}$
- $F^s = \{\langle \mathbf{0}, t, \sigma_1(t) \rangle | t \in T^s\} \cup \{\langle \sigma_2(t), t, \mathbf{0} \rangle | t \in T^s\}$
- $M^s = \mathbf{0}$

Вычисление множества переходов синхронизации II

Нетрудно видеть, что согласно построению, срабатывание перехода $t \in T^s$ в сети N^s добавляет $\sigma_1(t)$ к текущей маркировке и одновременно вычетает $\sigma_2(t)$. Следовательно, для того, чтобы достичь начальной нулевой маркировки посредством последовательности $v \in T^*$, $M_0^s[v\rangle M_0^s$ должно выполнятся равенство $\sigma_1(\Theta_v) = \sigma_2(\Theta_v)$, где Θ_v – мультимножество переходов, принадлежащих v. С другой стороны известно, что если существует $v \in T^* : M_0[v\rangle M_0$, тогда характеристический вектор Θ_v является Т-инвариантом. Более того, если Θ_v минимален, то он является минимальным инвариантом сети N^s.

Согласно этой теореме, для построения множества переходов синхронизации T_{syn} необходимо построить вспомогательную сеть N^s и вычислить множество ее минимальных Т-инвариантов. Каждый такой инвариант $f = \langle f_1, ..., f_n\rangle$ даст переход синхронизации $f_1 t_1 + ... + f_n t_n$, где $T = \{t_1, ..., t_n\}$. Существует множество алгоритмов поиска инвариантов в сетях Петри, основанных на алгоритме Фаркаса.

Вычисление множества переходов синхронизации III

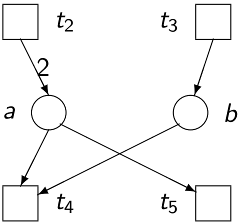


Рис.: Вспомогательная сеть N^S

На Рис.6 продемонстрировано построение вспомогательной сети N^s для сети, изображенной на Рис.2.(vi). Применив алгоритм поиска инвариантов, нетрудно убедиться, что сеть N^s имеет два минимальных инварианта, которые дают нам два перехода $t_2 + 2t_3 + 2t_4$ и $t_2 + 2t_5$.

Операция слияния мест I

Помимо операции параллельной композиции проблемно-ориентированные исчисления сетей содержат и другие важные операции, такие как последовательная композиция, выбор, итерация и др. Этот класс операций обычно использует понятие начального и конечного состояния и определяется с помощью операции слияния мест. В этом разделе дается определение этой базовой операции, названной операцией s-слияния сетей и использующей понятие s-точки доступа.

Перед тем как привести формальное определение этой операции рассматривается ее содержательное значение. Как и операция t-слияния эта операция реализует синхронизацию сетей, но не через переходы, а через места (s-синхронизация). Пусть даны две сети N_1 и N_2 с s-точками доступа $\xi_1 = \langle sid_1, \rho_1 \rangle$ и $\xi_2 = \langle sid_2, \rho_2 \rangle$, где $\rho_1 = \{M_{11}, ..., M_{1n}\}$ и $\rho_2 = \{M_{21}, ..., M_{2n}\}$, см. Рис.7. Операция s-слияния двух сетей N_1 и N_2 через точки ξ_1 и ξ_2 должна реализовывать следующую схему синхронизации. Предположим, что в сети N_1 достигнута маркировка $M_{1i} \in \rho_1$. Тогда s-синхронизация приводит к тому, что сеть N_2 мгновенно приобретает одну из маркировок $M_{2j} \in \rho_2$, причем ее выбор происходит

Операция слияния мест II

недетерминированно. Аналогично происходит синхронизация в обратном направлении. Иными словами в случае s-синхронизации, событием, приводящим к синхронизации, является достижение определенной маркировки одной сети, Сама же синхронизация заключается в установлении маркировки в другой сети.

Операция слияния мест III

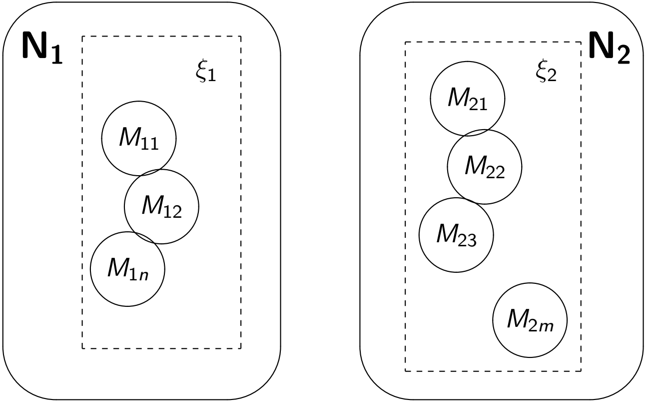


Рис.: Синхронизация сетей с помощью мест

Операция слияния мест IV

Если, например, ρ_1 содержит терминальные маркировки, а ρ_2 — начальные, то такая схема реализует последовательную композицию сетей N_1 и N_2.
Основываясь на таком понимании s-синхронизации, нетрудно понять и смысл само-s-синхронизации, т.е. синхронизации сети с самою собой через две точки доступа. С технической точки зрения удобно сначала дать определение s-слияния в унарной форме.

Операция слияния мест. Унарная форма I

Определение. Операция слияния мест. Унарная форма

Пусть дана сеть $N = \langle S, T, F\rangle$ и две ее точки доступа $\xi_1 = \langle sid_1, \rho_1\rangle$ и $\xi_2 = \langle sid_2, \rho_2\rangle$. Обозначим $S^1 = \|\rho_1\|, S^2 = \|\rho_2\|, S^{12} = S^1 \cup S^2$, $T^1 = {}^\bullet(S^1)^\bullet$, $T^2 = {}^\bullet(S^2)^\bullet$, $T^{12} = T^1 \cup T^2$. Тогда операция слияния мест (s-слияние) сети N по отношению к ξ_1 и ξ_2 строит новую сеть $N' = smerg(N, \xi_1, \xi_2) = \langle S', T', F'\rangle$ такую, что

1. $S' = S \backslash S^{12} \ \cup \ S^1 \times S^2$
2. $T' = T \backslash T^{12} \cup (T^1 \backslash T^2) \times \rho_2 \cup (T^2 \backslash T^1) \times \rho_1 \cup (T^1 \cap T^2) \times \rho_1 \times \rho_2$
3. $F' = F \ \backslash$

$$\begin{aligned}
&\{\langle {}^\bullet t, t, t^\bullet\rangle | t \in T^{12}\} \\
&\cup \{\langle Q_1'(M_2), (t, M_2), Q_1''(M_2)\rangle | t \in T_1 \backslash T_2, M_2 \in \rho_2\} \\
&\cup \{\langle Q_2'(M_1), (t, M_1), Q_2''(M_1)\rangle | t \in T_2 \backslash T_1, M_1 \in \rho_1\} \\
&\cup \{\langle Q_3'(M_1, M_2), (t, M_1, M_2), Q_3''(M_1, M_2)\rangle | t \in T_1 \cap T_2, \\
&\qquad M_1 \in \rho_1, M_2 \in \rho_2\}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
Q_1'(M_2) &= {}^\bullet t\lceil(S \backslash S^1) + {}^\bullet t\lceil S^1 \times_\mu M_2 \\
Q_1''(M_2) &= t^\bullet\lceil(S \backslash S^1) + t^\bullet\lceil S^1 \times_\mu M_2 \\
Q_2'(M_1) &= {}^\bullet t\lceil(S \backslash S^2) + M_1 \times_\mu {}^\bullet t\lceil S^2 \\
Q_2''(M_1) &= t^\bullet\lceil(S \backslash S^2) + M_1 \times_\mu t^\bullet\lceil S^2 \\
Q_3'(M_1, M_2) &= {}^\bullet t\lceil(S \backslash S^{12}) + {}^\bullet t\lceil S^1 \times_\mu M_2 + M_1 \times_\mu {}^\bullet t\lceil S^2 \\
Q_3''(M_1, M_2) &= {}^\bullet t\lceil(S \backslash S^{12}) + {}^\bullet t\lceil S^1 \times_\mu M_2 + M_1 \times_\mu t^\bullet\lceil S^2
\end{aligned}$$

Операция слияния мест. Унарная форма II

Несмотря на громоздкость определения, его интуитивный смысл довольно прост. Во-первых, вместо сливаемых мест, т.е. мест , участвующих в синхронизации, $S^1 \cup S^2$, берется их декартово произведение. Во-вторых, переходы инцидентные сливаемому множеству мест S^1 (или S^2) расщепляются на $|\rho_2|$ экземпляров (или $|\rho_1|$, соответственно). Каждая такая копия перехода (t, M), где $M \in \rho_2$ $(M \in \rho_1)$ соответствует одной из возможностей синхронизации. Если некоторый переход t одновременно инцидентен множествам S^1 и S^2, то он расщепляется на $|\rho_1| \times |\rho_2|$ экземпляров, реализуя все возможные комбинации синхронизации. Таким образом недетерминированный выбор направления синхронизации реализуется за счет расщепления переходов и, фактически, за счет сдвига момента выбора на один шаг вглубь.

Операция слияния мест. Бинарная форма I

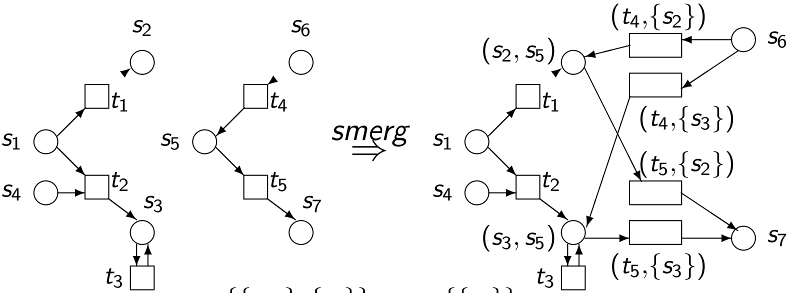
Definition

Операция слияния мест. Бинарная форма
Пусть даны две раздельные сети N_1 и N_2 с s-точками доступа ξ и ζ, соответственно. Тогда s-слияние этих сетей по отношению к точкам ξ и ζ есть новая сеть:

$$N = (N_1 \ {}_{\xi}\oplus_{\zeta} \ N_2) \ = \ smerg(N_1 \oplus N_2, \xi, \zeta)$$

На Рис.8 приведен пример выполнения операция s-слияния для простого случая. Здесь точка доступа ξ_1 имеет две маркировки $\{s_2\}$ и $\{s_3\}$, а точка ξ_2 – одну $\{s_5\}$. Поэтому переходы t_4 и t_5 расщепляются на два, соответствующие альтернативам $\{s_2\}$ и $\{s_3\}$. Переходы же t_1, t_2 и t_3 не расщепляются, т.к. для них существует всего одна возможность[1].

Операция слияния мест. Бинарная форма II



$$\rho_1 = \{\{s_2,\},\{s_3\}\}, \rho_2 = \{\{s_5\}\}$$

Рис.: Пример выполнения s-слияния

Использую схематическое изображение сети с s-точками доступа, можно схематически изобразить s-слияние, см. Рис.9.

Операция слияния мест. Бинарная форма III

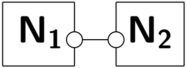


Рис.: Схематическое изображение операции s-слияния

[1]Строго говоря, эти переходы все же расщепляются, но только в один раз