Теория вычислительных процессов и структур

Лекция №10. Бисимуляционная эквивалентность сетей Петри

Содержание лекции

Определение сети Петри I

Далее будет использоваться определение сетей, которое по форме значительно отличается от общепринятых. Это сделано для того, чтобы существенно упростить последующие определения операций над сетями.

Сетью называется набор $N = \langle S, T, F \rangle$, где

1. $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ — множество *мест*;
2. $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ — множество *переходов* таких, что $S \cap T = \emptyset$;
3. $F \subseteq \mu S \times T \times \mu S$ — отношение *инцидентности* такое, что
   - 3.1 $\forall \langle Q_1', t_1, Q_1'' \rangle, \langle Q_2', t_2, Q_2'' \rangle \in F : \langle Q_1', t_1, Q_1'' \rangle \neq \langle Q_2', t_2, Q_2'' \rangle \Rightarrow t_1 \neq t_2$;
   - 3.2 $\{t \mid \langle Q', t, Q'' \rangle \in F\} = T$

Условия в пункте 3 говорят о том, что для каждого перехода $t \in T$ существует единственный элемент $\langle Q', t, Q'' \rangle \in F$, задающий для него входное мультимножество мест Q' и выходное мультимножество Q''. Далее будет широко использоваться следующая нотация.

Входные и выходные мультимножества I

Пусть задана сеть $N = \langle S, T, F \rangle$, $s \in S$, $t \in T$, $S' \subseteq S$, $T' \subseteq T$.

1. Если для некоторого перехода t имеем $\langle Q', t, Q'' \rangle \in F$, то будем обозначать ${}^\bullet t = Q'$, $t^\bullet = Q''$;
2. ${}^\bullet s = \{(t, n) \mid (s, n) \in t^\bullet\}$ и $s^\bullet = \{(t, n) \mid (s, n) \in {}^\bullet t\}$;
3. ${}^\bullet(S') = \sum_{s \in S'} {}^\bullet s$, $(S')^\bullet = \sum_{s \in S'} s^\bullet$, ${}^\bullet(S')^\bullet = {}^\bullet(S') + (S')^\bullet$;
4. ${}^\bullet(T') = \sum_{t \in T'} {}^\bullet t$, $(T')^\bullet = \sum_{t \in T'} t^\bullet$, ${}^\bullet(T')^\bullet = {}^\bullet(T') + (T')^\bullet$;

Будем говорить, что ${}^\bullet t$ — *входные*, а $t^\bullet$ — *выходные* места перехода t. Таким образом, согласно этой нотации, справедливо $\forall t \in T : \langle {}^\bullet t, t, t^\bullet \rangle \in F$. Далее будем говорить, что место s *инцидентно* переходу t если $s \in {}^\bullet t$ или $s \in t^\bullet$.

Расширим функции ${}^\bullet()$ и $()^\bullet$ на мультимножества переходов. Пусть $\Theta \in \mu T$ есть мультимножество переходов такое, что $\Theta = n_1 t_1 + n_2 t_2 + \ldots + n_k t_k$. Тогда положим

$$ {}^\bullet\Theta = n_1 {}^\bullet t_1 + n_2 {}^\bullet t_2 + \ldots + n_k {}^\bullet t_k $$

$$ \Theta^\bullet = n_1 t_1^\bullet + n_2 t_2^\bullet + \ldots + n_k t_k^\bullet . $$

Входные и выходные мультимножества II

Из этого определения непосредственно следуют следующие свойства:

$$
\begin{aligned}
{}^\bullet(\Theta_1 + \Theta_2) &= {}^\bullet\Theta_1 + {}^\bullet\Theta_2 && (1)\\
(\Theta_1 + \Theta_2)^\bullet &= \Theta_1^\bullet + \Theta_2^\bullet && (2)\\
{}^\bullet(\Theta_1 - \Theta_2) &= {}^\bullet\Theta_1 - {}^\bullet\Theta_2 && (3)\\
(\Theta_1 - \Theta_2)^\bullet &= \Theta_1^\bullet - \Theta_2^\bullet && (4)
\end{aligned}
$$

Пример сети Петри I

Сети имеют удобную графическую форму представления в виде двудольного графа, в которой места изображаются кружками, а переходы квадратиками. Места и переходы соединяются ориентированными дугами, причем место s соединяется с переходом t если $(s, n) \in {}^{\bullet}t$ и t соединяется с s если $(s, n) \in t^{\bullet}$ для некоторого натурального числа $n \in \mathcal{N}$. Здесь число n называется кратностью дуги, которое графически изображается рядом с дугой. Дуги, имеющие единичную кратность, будут обозначаться без приписывания единицы.
В качестве простого примера рассмотрим сеть $N = \langle S, T, F \rangle$, где

1. $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$;
2. $T = \{t_1, t_2, t_3\}$;
3. $F = \{\langle s_1, t_1, s_2 \rangle, \langle s_3, t_2, s_4 \rangle, \langle 2s_2 + s_4, t_3, 2s_1 + s_3 \rangle\}$

Пример сети Петри II

В графической форме эта сеть представлена на Рис.1. Сеть имеет четыре места и три перехода. Отношение F задает дуги сети. Так, например, элемент $\langle 2s_2 + s_4, t_3, 2s_1 + s_3 \rangle$ задает четыре дуги: из s_2 в t_3 и из t_3 в s_1 с кратностями 2, из s_4 в t_3 и из t_3 в s_2 с единичными кратностями. Для перехода t_3 справедливо ${}^\bullet t_3 = 2s_2 + s_4$ и $t_3^\bullet = 2s_1 + s_3$. Для места s_1 можно вычислить ${}^\bullet s_1 = 2t_3$ и $s_1^\bullet = t_1$.

Пример сети Петри III

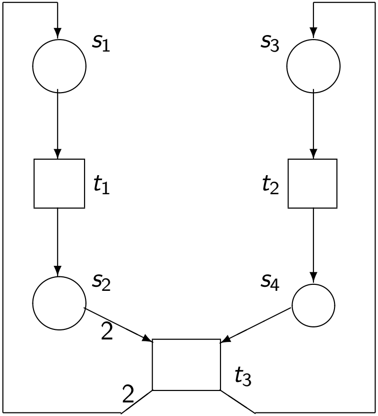


Рис.: Пример сети

Пример сети Петри IV

В литературе определение сетей, которое используется здесь, известно под названием *обобщенных* (generalized) сетей и сетей типа *“место–переход”* (Place/Transition nets), в которых, однако, не используется понятие емкости мест — функции $K : S \to \mathcal{N}$, полагая, что она неограничена, т.е. $K(s) = \infty$ для всех $s \in S$. Далее нам потребуется подкласс сетей, называемый *ординарными* сетями (ordinary nets).

Ординарные сети Петри I

Сеть $N = \langle S, T, F \rangle$ называется *ординарной*, если все ее дуги имеют кратность, равную единице — если для любых $s \in S$ и $t \in T$ выполняется $(s, n) \in {}^\bullet t$ или $(s, n) \in t^\bullet$ следует, что $n = 1$.
Иными словами, ординарные сети это сети, у которых кратность всех дуг равна единице. Часто, когда когда будет вестись речь о сетях, нас не будут интересовать конкретные имена мест и переходов (множества S и T). В этих случаях будет полезно использовать отношение эквивалентности — изоморфизм сетей.

Изоморфизм сетей I

Две сети $N_1 = \langle S_1, T_1, F_1 \rangle$ и $N_2 = \langle S_2, T_2, F_2 \rangle$ называются *изоморфными*, что записывается как $N_1 \simeq N_2$, если и только если существуют взаимнооднозначные функции $\nu_s \ : \ S_1 \to S_2$ и $\nu_t \ : \ T_1 \to T_2$ такие, что для любых $t \in T$ выполняется

$$\langle {}^\bullet t, t, t^\bullet \rangle \in F_1 \iff \langle \nu_s({}^\bullet t), \nu_t(t), \nu_s(t^\bullet) \rangle \in F_2,$$

где функция ν_s естественным образом обобщена на мультимножества: $\nu_s \ : \ \mu S_1 \to \mu S_2$ так, что $\nu_s(\sum n \cdot s) = \sum n \cdot \nu_s(s)$.

Маркировка сетей I

Само по себе понятие сети имеет статическую природу. Для задания динамических характеристик используется понятие *маркировки* сети $M \in \mu S$, т.е. функции $M : S \to \mathcal{N}_0$, сопоставляющей каждому месту целое число. Графически маркировка изображается в виде точек, называемых *метками* (tokens), и располагающихся в кружках, соответствующих местам сети. Отсутствие меток в некотором месте говорит о нулевой маркировке этого места.
Маркированной сетью (или сетью Петри) называется набор $\Sigma = \langle S, T, F, M_0 \rangle$, где

1. $\langle S, T, F \rangle$ – сеть;
2. $M_0 \in \mu S$ — *начальная маркировка*.

Определим два способа функционирования маркированных сетей, основанные на срабатывании отдельных переходов и мультимножеств переходов.

Правила срабатывания переходов I

Правило 1.
Пусть $\Sigma = \langle S, T, F, M_0 \rangle$ маркированная сеть.

1. Переход $t \in T$ считается *возбужденным* при маркировке $M \in \mu S$, если $M \geq {}^\bullet t$;
2. Переход t, возбужденный при маркировке M, может *сработать*, приведя к новой маркировке M', которая вычисляется по правилу: $M' = M - {}^\bullet t + t^\bullet$. Срабатывание перехода обозначается как $M[t\rangle M'$.

Иными словами переход считается возбужденным при некоторой маркировке, если в каждом его входном месте имеется количество меток не менее кратности соответствующих дуг. Возбужденный переход может сработать, причем при срабатывании из каждого его входных места изымается, а в каждое входное добавляется некоторое количество меток, равное кратности соответствующих дуг. Срабатывание перехода считается неделимой мгновенной операцией. Если одновременно возбуждено несколько переходов, сработать может любой из них.

Правила срабатывания переходов II

Это определение является классическим и не позволяет рассматривать одновременное срабатывание параллельных переходов. Более общее правило базируется на срабатывании мультимножеств переходов.

Правило 2.

Пусть $\Sigma = \langle S, T, F, M_0 \rangle$ маркированная сеть.

1. Мультимножество переходов, называемое *шагом*, $\Theta \in \mu T$ считается возбужденным при маркировке $M \in \mu S$, если $M \geq {}^\bullet\Theta$;
2. Шаг Θ, возбужденный при маркировке M, может сработать, приведя к новой маркировке $M' = M - {}^\bullet\Theta + \Theta^\bullet$. Это срабатывание записывается как $M[\Theta\rangle M'$.

Срабатывание шага является также мгновенным неделимым действием. Если возбуждено несколько шагов одновременно, то сработать может произвольный. Ясно, что предыдущее правило является частным случаем настоящего, где шаг состоит из единственного перехода. Поэтому следующие обозначения будут даны для второго правила, полагая, что их перепись в терминах первого не составит труда.

Правила срабатывания переходов III

Если $\Phi = \Theta_1\Theta_2...\Theta_k \in (\mu T)^*$, тогда $M[\Phi\rangle M'$ означает, что существуют маркировки $M_1, M_1, ..., M_{k-1} \in \mu S$ такие, что $M[\Theta_1\rangle M_1[\Theta_2\rangle ... M_{k-1}[\Theta_k\rangle M'$. Запись $M[\rangle M'$ означает, что $\exists \Phi \in (\mu T)^* \ : \ M[\Phi\rangle M'$, а запись $M[\Phi\rangle$ означает, что $\exists M' \in \mu S \ : \ M[\Phi\rangle M'$. *Множество достижимых маркировок* из маркировки M обозначается как $[M\rangle \stackrel{def}{=} \{M' \mid M[\rangle M'\}$.
Далее будем говорить, что правило 1 задает *“интерливинговую”* семантику, а правило 2 — *“шаговую”* семантику сетей Петри.

Пример маркированной сети I

На рис. 2 приведен пример маркированной сети. В начальной маркировке место s_1 имеет две метки, место s_3 – одну метку, а места s_2, s_4 – ни одной метки, т.е. $M_0 = 2s_1 + s_3$. Согласно первому правилу срабатывания в сети возбуждены переходы t_1 и t_2, т.к. ${}^\bullet t_1 = s_1 \le 2s_1 + s_3 = M_0$ и ${}^\bullet t_2 = s_3 \le 2s_1 + s_3 = M_0$. Их срабатывание имеет вид $2s_1 + s_3\ [t_1\rangle\ s_1 + s_2 + s_3$ и $2s_1 + s_3\ [t_2\rangle\ 2s_1 + s_4$. Согласно же второму правилу в сети возбуждено несколько шагов: t_1, t_2, $2t_1$, $t_1 + t_2$ и $2t_1 + t_2$, срабатывание которых имеет вид:

$$
\begin{array}{lll}
2s_1 + s_3 & [t_1\rangle & s_1 + s_2 + s_3 \\
2s_1 + s_3 & [t_2\rangle & 2s_1 + s_4 \\
2s_1 + s_3 & [2t_1\rangle & 2s_2 + s_3 \\
2s_1 + s_3 & [t_1 + t_2\rangle & s_1 + s_2 + s_4 \\
2s_1 + s_3 & [2t_1 + t_2\rangle & 2s_2 + s_4
\end{array}
$$

При маркировке же $2s_2 + s_4$ возбужден шаг, состоящий из перехода t_3, срабатывание которого имеет вид $2s_2 + s_4\ [t_3\rangle\ 2s_1 + s_3$, т.е. сеть переводится в начальную маркировку. И так далее.

Пример маркированной сети II

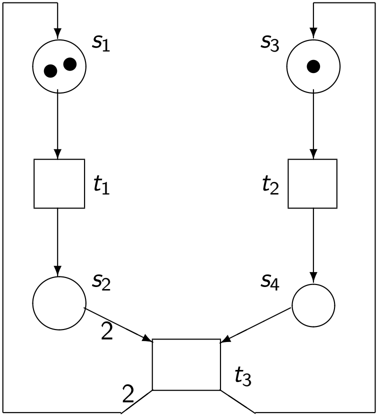


Рис.: Пример маркированной сети

Изоморфизм маркированных сетей I

Две маркированные сети $\Sigma_1 = \langle S_1, T_1, F_1, M_{01} \rangle$ и $\Sigma_2 = \langle S_2, T_2, F_2, M_{02} \rangle$ изоморфны если и только если их сети $N_1 = \langle S_1, T_1, F_1 \rangle$ и $N_2 = \langle S_2, T_2, F_2 \rangle$ изоморфны ($N_1 \simeq N_2$) с функциями ν_s и ν_t такими, что $M_{01}(s) = M_{02}(\nu_s(s))$ для всех мест $s \in S$.

Раздельное объединение сетей I

Пусть сети $N_1 = \langle S_1, T_1, F_1 \rangle$ и $N_2 = \langle S_2, T_2, F_2 \rangle$ имеют непересекающиеся множества элементов $(S_1 \cup T_1) \cap (S_2 \cup T_2) = \emptyset$.

1. Раздельное объединение сетей строит сеть $N = N_1 \uplus N_2 = \langle S_1 \cup S_2, T_1 \cup T_2, F_1 \cup F_2 \rangle$;
2. Раздельное объединение маркированных сетей $\Sigma_1 = \langle N_1, M_{01} \rangle$ и $\Sigma_2 = \langle N_2, M_{02} \rangle$ есть маркированная сеть $\Sigma = \Sigma_1 \uplus \Sigma_2 = \langle N_1 \uplus N_2, M_{01} \cup M_{02} \rangle$.

Таким образом раздельное объединение предполагает раздельность элементов исходных сетей. Если же это не так, т.е. если у исходных сетей есть общие места или переходы, то можно просто пользуясь определением изоморфизма переименовать множества мест и переходов так, чтобы они не пересекались. В дальнейшем, когда будет использоваться операция раздельного объединения будет предполагаться и раздельность элементов сетей.

Пометка I

Для того, чтобы работать с поведенческими характеристиками сетей, в смысле проявления их функционирования во внешнем мире, принято использовать понятие пометки.

Definition

Пометка сетей

Пометкой сети $N = \langle S, T, F \rangle$ называется набор $\lambda = \langle Vis, \sigma \rangle$, где

1. Vis – некоторое множество *имен видимых действий*;
2. $\sigma \ : \ T \to Vis \cup \{\tau\}$, где $\tau \notin Vis$ — специальный символ.

Таким образом пометка сопоставляет каждому переходу либо имя из Vis, либо специальный символ τ, характеризующий невидимое, внутреннее действие. Пометка задает нам способ наблюдения за поведением сети в процессе ее функционирования. Действительно, при срабатывании перехода $M[t\rangle M'$ можно "видеть" символ $\sigma(t)$, если он не равен τ. Если же $\sigma(t) = \tau$, то это срабатывание "не видимо".

Пометка II

Функция σ естественным образом может быть расширена на мультимножества $\sigma : \mu^+(T) \to Act$, где $Act \stackrel{def}{=} \mu Vis \setminus \mathbf{0} \cup \{\tau\}$, следующим образом:

$$\sigma(\sum_{t \in T} n \cdot t) = \begin{cases} \tau, & \text{если } \sigma(t) = \tau \text{ для всех } t \in T; \\ \sum_{t \in T} n \cdot \sigma(t) \lfloor \tau, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь для обозначения "невидимого" шага вместо пустого мультимножества $\mathbf{0}$ используется символ τ, как более привычный в теории сетей Петри. Запись $\mu^+(A) \stackrel{def}{=} \mu(A) \setminus \{\mathbf{0}\}$ обозначает множество всех непустых мультимножеств.
Так же функция σ может быть расширена и на множество последовательностей: $\sigma : \left(\mu^+(T)\right)^* \to Act^*$ так, что

$$\sigma(\Theta_1\Theta_2 \ldots \Theta_k) = \sigma(\Theta_1)\sigma(\Theta_2)\ldots\sigma(\Theta_k).$$

Определим так же функцию $\sigma^+ : \left(\mu^+(T)\right)^* \to (Act \setminus \{\tau\})^*$, заключающуюся в том, что $\sigma^+(\Phi)$ получается из $\sigma(\Phi)$ удалением всех τ–символов.

Пометка III

Более строго:

1. $\sigma^+(\Theta) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } \sigma(\Theta) = \tau; \\ \sigma(\Theta), & \text{в противном случае.} \end{cases}$
2. $\sigma^+(\Phi\Theta) = \sigma^+(\Phi)\sigma^+(\Theta)$

Видимость срабатывания последовательностей I

Definition

Видимость срабатывания последовательностей
Пусть дана маркированная сеть $\Sigma = \langle S, T, F, M_0 \rangle$, $\lambda = \langle Vis, \sigma \rangle$ – ее пометка, $V \in Act^*$, $W \in (Act \setminus \{\tau\})^*$.

1. Запись $M(V\rangle^s_\lambda M'$ означает, что $\exists \Phi \in (\mu^+(T))^* \ : \ M[\Phi\rangle M'$ и $\sigma_\lambda(\Phi) = V$;
2. Запись $M(W\rangle\rangle^s_\lambda M'$ будет означать, что $\exists \Phi \in (\mu^+(T))^* \ : \ M[\Phi\rangle M'$ и $\sigma^+_\lambda(\Phi) = W$;

W будем называть *видимостью* последовательности Φ.

Предыдущие определения сделаны для общего случая функционирования сети с помощью шаговой семантики. Верхний индекс в выражениях $M(V\rangle^s_\lambda M'$ и $M(W\rangle\rangle^s_\lambda M'$ подчеркивает этот факт. Случай интерливинговой семантики является частным случаем, где каждый шаг состоит из одного перехода. В этом случае будем писать: $M(V\rangle^i_\lambda M'$ и $M(W\rangle\rangle^i_\lambda M'$.
Часто в сетях с пометкой нас будет интересовать только их внешнее поведение, определяемое пометкой и которое не зависит от

Видимость срабатывания последовательностей II

конкретных имен мест и переходов (S и T). В таких случаях полезно определять сети с пометками с точностью до изоморфизма.

Изоморфизм помеченных сетей I

Definition

Изоморфизм помеченных сетей

Пусть даны сети $N_1 = \langle S_1, T_1, F_1 \rangle$ и $N_2 = \langle S_2, T_2, F_2 \rangle$ с пометками соответственно α и β. Тогда эти сети изоморфны по отношению к этим пометкам, пишется как $N_1 \ {}_{\alpha}\!\simeq_{\beta} \ N_2$, если и только если $N_1 \ \simeq \ N_2$ с функциями ν_s, ν_t и $\sigma_\alpha(t) = \sigma_\beta(\nu_t(t))$ для всех $t \in T$.

Из этого определения и определения изоморфизма маркированных сетей нетрудно вывести определение изоморфизма помеченных маркированных сетей.

Изоморфизм помеченных сетей является отношением эквивалентности, который позволяет отождествлять сети с одинаковой структурой. Однако для многих приложений эта эквивалентность часто оказывается слишком сильной. Другим классическим примером эквивалентности сетей Петри, пришедшим из теории конечных автоматов, является *стринговая* или *языковая* эквивалентность, согласно которой две помеченные сети считаются эквивалентными, если их функционирование порождает одно и то же множество строк, составленных из имен переходов (язык). Однако

Изоморфизм помеченных сетей II

для применений в рамках композиционального подхода это понятие оказывается неприемлемо (слишком слабым). Так, например, две сети, изображенные на Рис. 3(i) являются стрингово–эквивалентными, т.к. порождают один и тот же язык $\{\varepsilon, a, ab, ac\}$, но с точки зрения внешнего наблюдателя они не эквивалентны. Действительно, после выполнения действия a в первой сети возможно выполнение как b так и c, а во второй сети только b или только c.
Для учета такого рода тонкостей было предложено большое количество эквивалентностей, коллективно называемые *поведенческими* эквивалентностями. Наиболее изученным и широко–используемым среди них является *бисимуляционная* эквивалентность, которая в теории параллельных процессов играет ключевую роль в том смысле, что на ее основе могут быть определены многие другие поведенческие эквивалентности.
Далее приводится определение бисимуляционной эквивалентности помеченных сетей для случаев интерливинговой и шаговой семантик.

Бисимуляционная эквивалентность I

Definition

Бисимуляционная эквивалентность
Две маркированные сети $\Sigma_1 = \langle S_1, T_1, F_1, M_{01} \rangle$ и $\Sigma_2 = \langle S_2, T_2, F_2, M_{02} \rangle$ с пометками соответственно α и β называются интерливинго бисимуляционно (би–) эквивалентными, записывается как $\Sigma_1 \ {}_{\alpha}\!\approx^{i}_{\beta} \Sigma_2$, если и только если существует отношение *бисимуляции* $\Re \subseteq [M_{01}\rangle \times [M_{02}\rangle$ такое, что

1. $(M_{01}, M_{02}) \in \Re$;
2. если $(M_1, M_2) \in \Re$, то
   - 2.1 $M_1(W\rangle\rangle^{i}_{\alpha} M_1' \Longrightarrow \exists M_2' \ : \ M_2(W\rangle\rangle^{i}_{\beta} M_2'$ и $(M_1', M_2') \in \Re$;
   - 2.2 $M_2(W\rangle\rangle^{i}_{\beta} M_2' \Longrightarrow \exists M_1' \ : \ M_1(W\rangle\rangle^{i}_{\alpha} M_1'$ и $(M_1', M_2') \in \Re$;

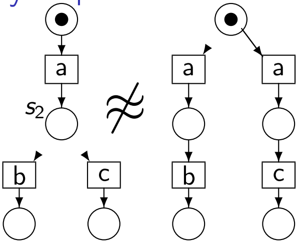
Шаговая би–эквивалентность сетей Σ_1 и Σ_1 получается заменой индекса i на s в вышестоящем определении и обозначается как $\Sigma_1 \ {}_{\alpha}\!\approx^{s}_{\beta} \Sigma_2$.

Две маркировки M_1 и M_2 такие, что $(M_1, M_2) \in \Re$ будут называться эквивалентными. Неформально говоря, две сети би–эквивалентны, если, во–первых, их начальные маркировки эквивалентны. Во–вторых, если из одной из двух эквивалентных маркировок,

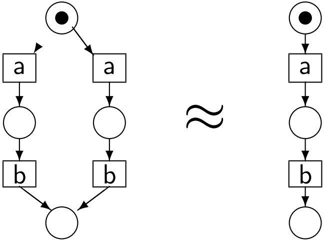
Бисимуляционная эквивалентность II

скажем M_1, существует путь с видимостью W в маркировку M_1', то из M_2 существует путь с видимостью W в некоторую маркировку M_2', которая эквивалентна M_1'. И наоборот. Следует отметить, что в этом определении учитываются только видимые действия. В литературе такое определение называется слабой би–эквивалентностью, в отличии от сильной би–эквивалентности, учитывающей все переходы.

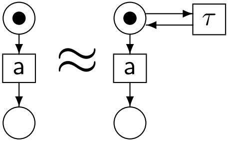
Бисимуляционная эквивалентность III



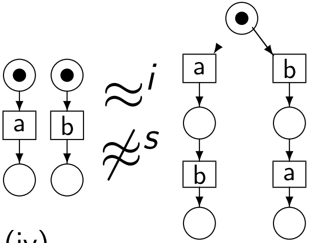
(i)



(ii)



(iii)



(iv)