Теория вычислительных процессов и структур

Лекция №7. Свойства простых сетей Петри

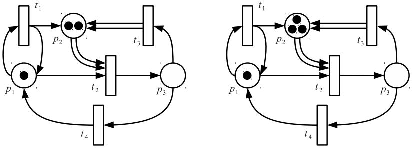
Содержание лекции

Основные свойства сетей Петри

Определение свойств

Свойства сетей Петри. Ограниченность I

- Можно нарисовать такую сеть Петри, в которой при ее работе некоторые ее места могут накапливать неограниченное число фишек. Например сеть (неограниченное срабатывание перехода t_1 приводит к накоплению неограниченного числа фишек в p_2).



а) б)

Если отождествлять места и фишки с реальными элементами моделируемой системы, то такие переполнения вряд ли можно было бы признать корректными в ее поведении.

- Поэтому важным свойством сетей Петри является понятие *ограниченности*.

Свойства сетей Петри. Ограниченность II

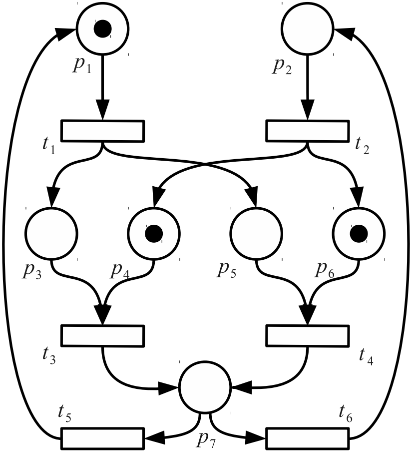
Место p в сети Петри $N = (P, T, F, W, M_0)$ называется *ограниченным*, если существует число n такое, что для любой достижимой в сети разметки M справделиво неравенство $M(p) \leq n$.

Сеть N называется *ограниченной сетью*, если любое ее место ограничено.

Следствие ограниченности: Множество достижимых разметок $R(N)$ конечно, если и только если N — ограниченная сеть.

В сети на предыдущем слайде места p_1 и p_3 ограничены, так как каждое из них может содержать не более одной фишки. В то же время место p_2 не ограниченно, и поэтому эта сеть не является ограниченной.

Свойства сетей Петри. Ограниченность III



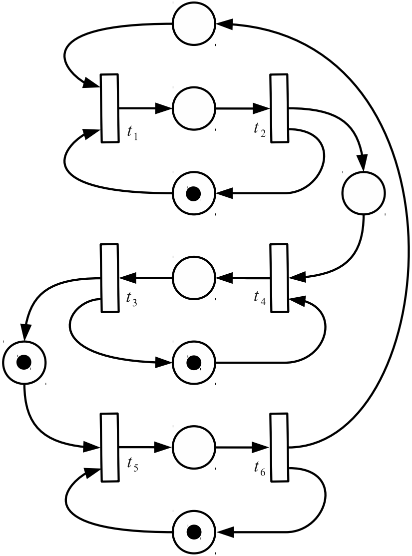
Данная сеть является ограниченной: любое место в ней не может содержать более 2 фишек.

Свойства сетей Петри. Безопасность I

- Место p называется *безопасным*, если $\forall M \in R(N) : M(p) \leq 1$;
- Сеть называется *безопасной*, если все ее места безопасны.
- Следствие безопасности: любая достижимая в безопасной сети разметка представляет собой вектор из 0 и 1.

Сети на приведнных выше слайдах не являются безопасными.

Свойства сетей Петри. Безопасность II



Данная сеть является безопасной

Свойства сетей Петри. Консервативность I

- Ограниченность и безопасность характеризуют емкость условий: в дискретной информационной системе, моделируемой соответствующими сетями, можно ограничить емкость условий, необходимых для наступления событий.
- Родственным этим понятиям является понятие *консервативной сети*, в которой сумма фишек во всех ее местах остается постоянной при работе сети, т.е.

$$\forall M_1, M_2 \in R(N) : \sum_{p \in P} M_1(p) = \sum_{p \in P} M_2(p).$$

- В консервативной сети каждый переход является *консервативным* в том смысле, что его срабатывание не меняет числа фишек в сети, т.е.

$$|^\bullet t| = |t^\bullet|$$

Свойства сетей Петри. Живость и мертвость I

- Переход t в сети Петри $N = (P, T, F, W, M_0)$ называется *потенциально живым при разметке* $M \in R(N)$, если

  $$\exists M' \in R(N, M) : M' \geq {}^{\bullet}F(t),$$

  то есть существует достижимая от M разметка M', при которой переход t может сработать.
- Если в определении выше $M = M_0$, то переход t называется *потенциально живым в сети*, то есть когда-нибудь может сработать.
- Переход t — *мертвый при* M, если он не является потенциально живым при M, то есть не может сработать.
- Переход t — *мертвый в сети*, если он мерт при любой достижимой в сети разметки.

Свойства сетей Петри. Живость и мертвость II

- Переход t называется *живым в сети* Петри N, если

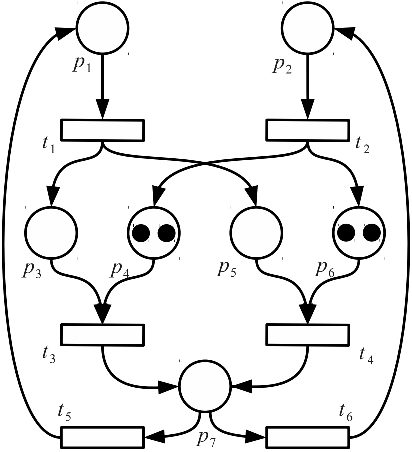
$$\forall M \in R(N), \exists M' \in R(N, M) : M \geq {}^{\bullet}F(t),$$

то есть переход t является потенциально живым при любой достижимой в сети N разметки.

- Переход t — *потенциально мертвый*, если существует $M \in R(N)$ такая, что при любой разметке $M' \in R(N, M)$ переход t не может сработать.
- Разметка M в этом случае называется *t-тупиковой*.
- Если разметка t-тупиковая для всех $t \in T$, то она является *тупиковой*. Если M — тупиковая разметка, то $R(N, M) = \{M\}$.
- Сеть называется *живой*, если все ее переходы живы.

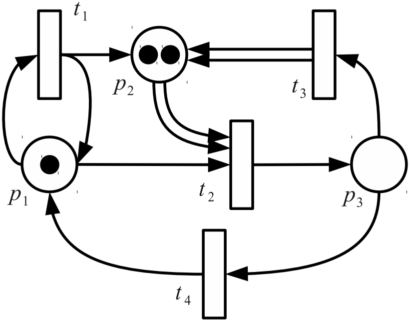
Свойства сетей Петри. Живость и мертвость III

В сети на рисунке (далее) все переходы потенциально живы и все переходы потенциально мертвы, так как в ней достижима тупиковая разметка (показана на рисунке). Эта сеть не может быть живой, так как содержит потенциально мертвые переходы.



Свойства сетей Петри. Живость и мертвость IV

Сеть на следующем рисунке также не является живой, так как в ней достижимы тупиковые разметки вида $(0, n, 0)$, $n \geq 0$.



Свойства сетей Петри. Устойчивость I

- Переход t называется *устойчивым в сети* N, если

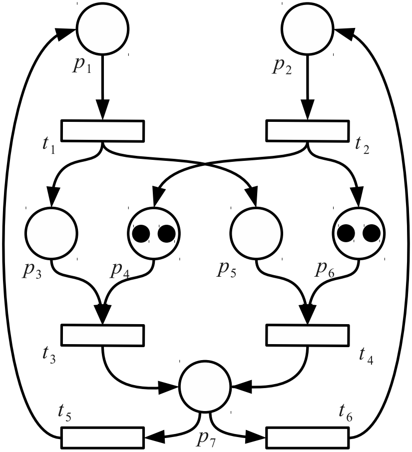
$$\forall t' \in T \setminus \{t\}, \forall M \in R(N):$$

$$(M \geq {}^{\bullet}F(t)) \wedge (M \geq {}^{\bullet}F(t')) \Rightarrow (M \geq {}^{\bullet}F(t) + {}^{\bullet}F(t')),$$

  то есть если переход t может сработать, то никакой другой переход не может, сработав, лешить его этой возможности.
- Сеть Петри N называется *устойчивой*, если все ее переходы устойчивы.

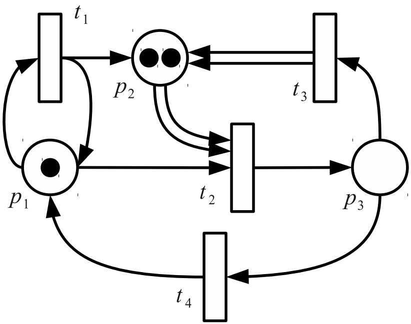
Свойства сетей Петри. Устойчивость II

В сети на рисунке (далее) устойчивы переходы t_1, t_2, t_3, t_4.



В сети на рисунке (далее) устойчив только переход t_2.

Свойства сетей Петри. Устойчивость III



Однако обе сети не устойчивы, так как в первой сети не устойчивы переходы t_5, t_6, во второй — t_1, t_3, t_4.

Общие положения I

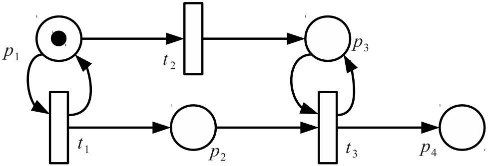
- Конечная цель специальной теории сетей Петри — автоматический анализ свойств сетей, их автоматические синтез и преобразования, на основании чего могут быть построены практические алгоритмы анализа, синтеза и преобразования дискретных систем, моделируемых сетями.
- В частности полезно найти алгоритмы, с помощью которых для любой предъявленной сети можно установить, обладает ли она интересующим нас свойством — является ли она ограниченной, живой, устойчивой и т.п. В первую очередь нужно выяснить существование такие алгоритмов.
- Эти вопросы формулируются как массовые алгоритмические проблемы для сетей: проблема ограниченности (существует ли алгоритм, который позволяет узнать, является ли данная сеть ограниченной), проблема потенциальной живости, проблема устойчивости, проблема безопасности и т.д.
- **Говорят, что проблема разрешима, если соответствующий алгоритм распознавания существует, в противном случае проблема неразрешима.**

Общие положения II

- Большинство из перечисленных выше проблем связано с определением возможности достижения некоторых специальных разметок в сети (например, с достижением t-тупиковых разметок для данного перехода t), т.е с проблемой достижимости заданной разметки.
- В этой проблеме ставится вопрос о существовании алгоритма, с помощью которого можно узнать для произвольной сети N и произвольной разметки M, принадлежит ли M множеству $R(N)$.

Проблемы ограниченности и безопасности I

- Проблема ограниченности рассмотрим на примере следующей сети.



- В данной сети можно выделить два неограниченных места p_2 и p_4. Место p явно неограниченно (в нем может быть бесконечное число фишек), поскольку переход t_1 может сработать бесконечное число раз — это, так называемая, "первичная" неограниченность. Место p_4 "вторично" неограниченно (по отношению к p_2), поскольку количество фишек в p_4 может быть сколь угодно большим, но конечным, так как переход t_3 может сработать только конечное число раз, не большее, чем число срабатываний перехода t_1.
- Рассмотрим "первичную" неограниченность.

Проблемы ограниченности и безопасности II

- Исследование проблемы ограниченности сводится к анализу графа другого типа, а именно — *покрывающего дерева сети*. Для любой сети такой граф конечен и может быть построен с помощью следующей процедуры:
  1. Первоначально предполагается, что дерево содержит единственную вершину-корень M_0 и не имеет дуг.
  2. Пусть M — вершина дерева, которая еще не объявлена листом (т.е. вершиной из которой не исходит ни одна дуга), но в дереве нет исходящих из нее дуг. Возможны четыре случая

     2.1 Ни один из переходов сети не может сработать при разметке M, т.е. $\forall t \in T : M \not\geq {}^\bullet F(t)$. В этом случае вершина M объявляется листом.

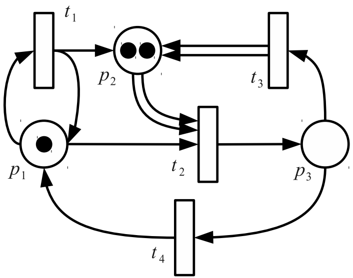
     2.2 На пути из корня дерева в вершину Mх существует вершина M' такая, что $M = M'$. Вершина M объявляется листом.

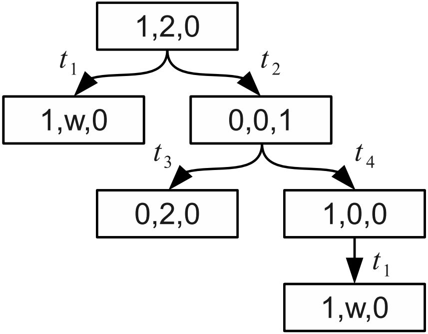
     2.3 На пути из корня дерева в вершину Mх существует вершина M' такая, что $M < M'$. Для любого места p такого, что $M'(p) < M(p)$, значение соответствующей координаты M заменяется на ω и вершина M объявляется ω-листом.

     2.4 Если ни один из вышеперечисленных случаев не имеет места, то M — внутренняя вершина дерева. Для каждого перехода $t \in T$ такого, что $M \geq {}^\bullet F(t)$, в дерево добавляется новая вершина $M' = M - {}^\bullet F(t) + F^\bullet(t)$ и дуга, ведущая из M в M', помеченная t.

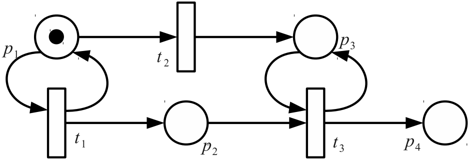
Проблемы ограниченности и безопасности III

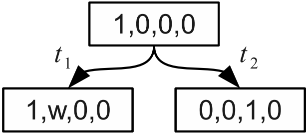
- На рисунке показан сеть Петри и ее покрывающее дерево





- На рисунке показан сеть Петри и ее покрывающее дерево





Проблемы ограниченности и безопасности IV

- Theorem (Теорема 2.2)

  Проблема ограниченности сети Петри разрешима.

  Алгоритм распознавания ограниченности сети состоит в построении ее покрывающего дерева и последующего просмотра конечного числа вершин-разметок. Если будет найдена хотя бы одна разметка с символом ω, то сеть не ограничена, в противном случае — ограничена.

- Из указанного выше алгоритма невозможно установить, какие места в сети могут иметь "вторичную" неограниченную разметку. Чтобы иметь такую возможность, следует построить *полное покрывающее дерево* сети по следующей процедуре:

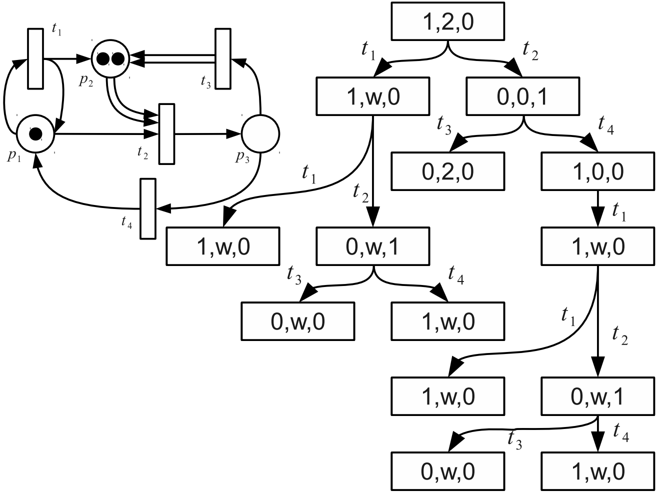
  1. Строится покрывающее дерево сети N. Если это дерево не имеет ω-листов, то построение полного покрывающего дерева закончено и оно совпадает с покрывающим деревом.

Проблемы ограниченности и безопасности V

2. Если покрывающее дерево содержит ω-листы M, то для него строится покрывающее дерево для сети N', полученной из N заменой начальной разметки M_0 на разметку M. При этом правила срабатывания переходов и изменение разметки сети обобщаются на случай векторов с ω с учетом арифметических свойств расширенного множества натуральных чисел. Построенное дерево присоединяется к основному дереву совмещением корня M в новом дереве с листом M в основном дереве. Процесс повторяется до тех пор, пока не исчезнет последний ω-лист.

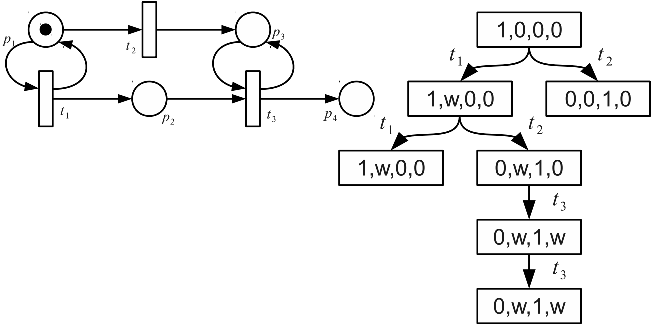
Проблемы ограниченности и безопасности VI

- На рисунке показан сеть Петри и ее полное покрывающее дерево



Проблемы ограниченности и безопасности VII

- На рисунке показан сеть Петри и ее полное покрывающее дерево



- Следующие теоремы легко доказываются, исходя из основных свойств (полных) покрывающих деревьев:

- Theorem (Теорема 2.5)

Проблема безопасности сетей Петри разрешима.

Доказательство основано на том, что все вершины покрывающего дерева содержит разметки в алфавите $\{0, 1\}$

Проблемы ограниченности и безопасности VIII

- **Theorem (Теорема 2.6)**

  Проблема потенциальной живости переходов разрешима.

  Переход t потенциально живой, если и только если он метит некоторую дугу в полном покрывающем дереве сети хотя бы один раз.

- **Theorem (Теорема 2.7)**

  Существует алгоритм, с помощью которого можно узнать, получит ли данное место в сети хотя бы одну фишку.

  Если хотя бы в одной вершине покрывающего дерева позиция, соответствующая месту p, содержит число $n > 0$, то место p может получить фишку в процессе функционирования сети.

- **Theorem (Теорема 2.8)**

  Существует алгоритм, с помощью которого можно узнать, может ли данный переход сработать сколь угодно большое число раз.

  Достаточно присоединить к данному переходу новое "висячее" выходное место p и затем выяснить, является ли оно неограниченным.