Теория вычислительных процессов и структур

Лекция №6. Теория сетей Петри. Простые сети Петри

Содержание лекции

Понятие дискретной системы I

- Среди большого числа понятий, которые возникли и исследуются в теоретическом программировании (в том числе в информатике и кибернетике), одним из наиболее общих является понятие *дискретной динамической системы*.
- Примеры:
  - компьютеры, их элементы и устройства, компьютерные сети;
  - компьютерные программы и операционные системы;
  - системы сбора и автоматической обработки цифровой информации;
  - системы автоматического управления объектами и процессами;
  - производственные системы дискретного характера (сборочные линии);
  - социально-экономические и другие.
- Приведенные примеры — сложные системы, имеющие сложную внутреннюю структуру. Дискретность этих систем проявляется в том, что в их внутренней структуре можно выделить счетное число состояний, в которых они могут пребывать в некоторые моменты времени, а также переходить из состояния в состояние, в некоторые моменты времени.

Понятие дискретной системы II

- Это множество может быть очень и очень большим, но чаще всего, оно конечно и счетно. Многие непрерывные (или аналоговые) системы можно представить дискретными, вводя некоторые границы дискретизации. Например: звук.
- Особую роль в моделировании дискретных системы сыграла теория автоматов. Автомат является математической абстракцией *последовательной* дискретной системы.
- В ходе развития науки, техники, производства появляются новые виды дискретных систем, их разнообразие и сложность постоянно растут. Чтобы успешно решать задачи анализа и синтеза все более сложных систем, необходимо дальнейшее развитие и совершенствование математических методов их исследования.
- Однако, со временем все большее внимание привлекали *параллельные системы с недетерминированным поведением*, в которых отдельные компоненты функционируют, в основном, независимо, взаимодействуя друг с другом время от времени.
- Примеры:

Понятие дискретной системы III

  - многопроцессорные вычислительные системы;
  - параллельные программы;
  - многозадачные операционные системы;
  - асинхронные электронные схемы и т.д.
- Системы с параллельно функционирующими и асинхронно (т.е. в произвольные моменты времени) взаимодействующими компонентами не описываются адекватно в терминах классической теории автоматов.
- Среди многих существующих методов описания и анализа дискретных параллельных систем выделился подход, который основан на сетевых моделях специального вида - сети Петри (по имени их создателя Карл Петри).

Системы, процессы, сети I

- Первый шаг на пути к построению модели дискретной системы — это абстрагирование от конкретных физических и функциональных особенностей ее компонентов.
- Компоненты системы и их действия представляются абстрактными *событиями*, каковыми могут быть, например, исполнение оператора программы, переход триггера из состояния в состояние, прерывание в операционной системе, завершение этапа проекта и т.п.
- Событие может произойти (реализоваться) один раз, повториться многократно, порождая конкретные *действия* (реализации события), или не произойти ни разу.
- Совокупность действий, возникающих как реализации событий при функционировании дискретной системы, образует *процесс*, порождаемый этой системой.
- В общем случае одна и та же система может функционировать в одних и тех же условиях по-разному, порождая некоторое *множество процессов*, т.е. функционировать *недетерминированно*.

Системы, процессы, сети II

- Возникновение событий в сложных дискретных системах, описывается через указание ситуаций, при которых данные события могут реализоваться. Такие ситуации называются *условиями* реализации событий. Условие имеет емкость: условие не выполнено (емкость 0), условие выполнено (емкость 1), условие выполнено с n-кратным запасом (емкость равна n, где n — целое положительное число).
- Примеры условий: наличие данного для операции в программе, состояние некоторого регистра в компьютере, наличие детали на конвейере и т.п.
- **Определенные сочетания условий разрешают реализоваться некоторому событию (предусловия события), а реализация события изменяет некоторые условия (постусловия события), т.е. события взаимодействуют с условиями, а условия — с событиями.**

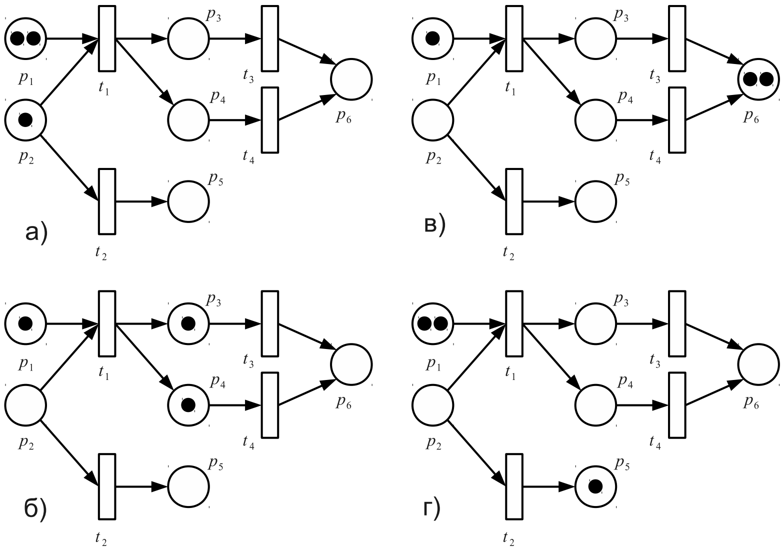
Системы, процессы, сети III

- **Таким образом, предполагается представлять дискретные системы как структуры, образованные из элементов двух типов — событий и условий. При этом компонента времени в описании отсутствует, а временные связи заменены на причинно-следственные связи.**
- **Отказ от времени в моделях дискретных систем приводит к тому, что событие рассматривается либо как *неделимое и мгновенное*, либо как *составное*, имеющее собственную структуру и состоящее из “внутренних” *подсобытий*.**
- В сетях Петри события и условия представлены абстрактными символами из двух непересекающихся алфавитов, называемых соответственно множеством *переходов* и множеством *мест*. В графическом представлении сетей переходы изображаются “прямоугольниками”, места — “кружками”.
- Условия-места и события-переходы связаны отношением непосредственной зависимости (непосредственной причинно-следственной связи), которое изображается с помощью направленных дуг, ведущих из мест в переходы и из переходов в места.

Системы, процессы, сети IV

- Места, из которых ведут дуги на данный переход, называются его *входными* местами. Места, на которые ведут дуги из данного перехода, называются его *выходными* местами.
- Пример сети Петри:

Системы, процессы, сети V



Системы, процессы, сети VI

- Выполнение условий изображается *разметкой* соответствующего места, а именно помещение числа n или n фишек (маркеров) в этом место, где $n > 0$ — емкость условия.
- Динамика поведения моделируемой системы находит свое отражение в функционировании (работе) сети Петри.
- Неформально работу сети можно представить как совокупность локальных действий, которые называются *срабатываниями* переходов. Они соответствуют реализациям событий и приводят к изменению разметки мест, т.е. локальному изменению условий в системе.
- Переход *может сработать*, если выполнены все условия реализации соответствующего события.

Системы, процессы, сети VII

- Срабатывание перехода — неделимое действие, изменяющее разметку его входных и выходных мест следующим образом: из каждого входного места изымается по одной фишке, а в каждое выходное место добавляется по одной фишке. Тем самым реализация события, изображаемого переходом, изменяет состояние (емкость) непосредственно связанных с ним условий так, что емкость предусловий, вызвавших реализацию этого события, уменьшается, а емкость постусловий, на которые оно влияет, увеличивается.
- Если два (и более) перехода могут сработать и они не имеют общих входных мест, то их срабатывания являются независимыми действиями, осуществляемыми *в любой последовательности или параллельно*.

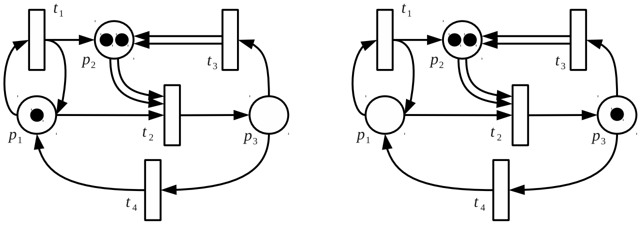
Системы, процессы, сети VIII

- Если несколько переходов могут сработать и имеют общее входное место, то сработает только один, любой из них. При этом может оказаться, что, сработав, этот переход лишит возможности сработать другие переходы. Таким способом в сети моделируется конфликт между событиями, когда реализация одного события может исключить возможность реализации других. В сети никак не указывается, каким образом конфликт следует фактически разрешать. **Считается, что решение о том, какое из конфликтующих событий следует реализовать, принимается вне формализма сети, т.е. поведение сети носит недоопределенный (недетерминированный) характер**. Аналогичный конфликт возникает в том случае, когда несколько переходов могут сработать и они имеют общие выходные места.
- В процессе функционирования сети происходит смена разметок мест как результат срабатывания ее переходов. Сеть останавливается, если ни один из ее переходов не может сработать.

Системы, процессы, сети IX

- Пример сети:

Системы, процессы, сети X



а) б)

Предварительные термины и обозначения I

- Зафикисируем основные математические обозначения, которые будем использовать в формальных определениях;
- $\{a, b, \dots, c\}$ — множество элементов $a, b, \dots, c$;
- $(a, b, \dots, c)$ — набор (упорядоченное множество) элементов $a, b, \dots, c$;
- $\{x \mid A(x)\}$ — множество значений переменной x, удовлетворяющих условию $A(x)$;
- $x, \dots, y \in X$ — элементы $x, \dots, y$ принадлежат множеству X;
- $X, \dots, Y \subseteq Z$ — множества $X, \dots Y$ являются подмножествами (частью) множества Z;
- $\notin, \nsubseteq$ — отрицание отношений $\in, \subseteq$;
- $|X|$ — мощность (число элементов) множества X;
- $\emptyset$ — пустое множество;
- $\cup, \cap, \setminus$ — теоретико-множественные операции объединения, пересечения и разности множеств;
- $A_1 \times \dots \times A_n$ — декартово произведение множеств $A_1, \dots, A_n$;

Предварительные термины и обозначения II

- $A^n = \underbrace{A \times \dots \times A}_{n}$, $n \geq 2$;
- $\mathbf{N}$ — множество всех натуральных чисел (включая 0);
- $\vee, \wedge, \neg, \Rightarrow$ — логические операции дизъюнкции, конъюнкции, отрицания и импликации;
- $A \Leftrightarrow$ — A истинно тогда и только тогда, когда истинно B;
- $\exists, \forall$ — кванторы существования и всеобщности.
- Пусть X, Y — множества, $R \subseteq X \times X$ — бинарное отношение на X, и $x, y \in X$.
- xRy — x и y находятся в отношении R;
- R^{-1} — обращение отношения R, т.е. $yR^{-1}x$, если и только если xRy;
- $\overline{R}$ — дополнение отношения R, т.е. $\overline{R} = (X \times X) \setminus R$;
- $R \circ S$ — суперпозиция отношений R и S, т.е. $R \circ S = \{(x, y) \mid \exists z \in X \ : \ xRz \wedge zSy\}$;
- $R^n = \underbrace{R \circ \dots \circ R}_{n}$, $n \geq 2$;

Предварительные термины и обозначения III

- $R^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n$, где $n \in \mathbf{N}$, — транзитивное замыкание отношения R;
- Для функции f запись $f : X \to Y$ указывает область определения функции X и область ее значений Y.
- Конечное множество символов $A = \{a, b, \ldots, c\}$ образует алфавит.
- Словом в алфавите A называется некоторая последовательность выписанных подряд символов из алфавита A.
- Конкатенацией двух слов α и β в алфавите A называется слово $\alpha\beta$, т.е. слово, полученное выписыванием подряд слов α и β.
- Через A^* обозначим множество всех слов в алфавите A;
- Через λ — пусто слово, т.е. слово, не содержащее ни одного символа.
- Через a^n и α^n, где a — символ, α — слово, обозначим слова $\underbrace{aa\ldots a}_{n}$ и $\underbrace{\alpha\alpha\ldots\alpha}_{n}$.
- Если слово представляет собой конкатенацию $\beta\gamma$, то β называют префиксом, а γ — суффиксом слова $\beta\gamma$.

Предварительные термины и обозначения IV

- Если A и B — алфавиты такие, что $A \supseteq B$, то слово β в алфавите B, полученное вычеркиванием из слова α в алфавите A всех символов из $A \setminus B$, будем называть проекцией слова α в алфавите A на алфавит B.
- Через $\mathbf{N}_\omega = \mathbf{N} \cup \{\omega\}$ обозначим расширенное множество натуральных чисел, где ω — элемент, удовлетворяющий для любого $n \in \mathbf{N}$ следующим свойствам:
  1. $\omega > n$,
  2. $n + \omega = \omega + n = \omega + \omega = \omega - n = \omega - \omega = \omega$,
  3. $\omega \cdot n = n \cdot \omega = \omega$,
  4. $0 \cdot \omega = \omega \cdot 0 = 0$.
- Пусть $K = (k_1, \ldots, k_r)$, $L = (l_1, \ldots, l_r) \in \mathbf{N}^r$ — векторы из r чисел.
- Арифметические операции распространим на векторы, считая их подкомпонентными операциями, т.е. $K + L = (k_1 + l_1, \ldots, k_r + l_r)$.

Предварительные термины и обозначения V

- Отношения определим следующим образом

$$(K \le L) = \begin{cases} \text{истина} & \text{, если } \forall i, 1 \le i \le r : k_i \le l_i, \\ \text{ложь} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(K = L) = \begin{cases} \text{истина} & \text{, если } \forall i, 1 \le i \le r : k_i = l_i, \\ \text{ложь} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$(K < L) = \begin{cases} \text{истина} & \text{, если } (\forall i, 1 \le i \le r : k_i \le l_i) \wedge \\ & (\exists i, 1 \le i \le r : k_i < l_i) \\ \text{ложь} & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

- *Сетью* будем называть тройку (P, T, F), где P — непустое множество мест, T — непустое множество переходов, $F \subseteq P \times T \cup T \times P$ — отношение инцидентности, и для (P, T, F) выполнены следующие условия:

  A1 $P \cap T = \emptyset$ (множества мест и переходов не пересекаются),

Предварительные термины и обозначения VI

A2 $(F \neq \emptyset) \wedge (\forall x \in P \cup T,\ \exists y \in P \cup T\ :\ xFy \vee yFx)$ (т.е. любой элемент сети инцидентен хотя бы одному элементу другого типа),

A3 если для проивольного элемента сети $x \in X$ обозначить через ${}^\bullet x$ множество его *входных элементов* $\{y \mid yFx\}$, а через $x^\bullet$ — множество его *выходных элементов* $\{y \mid xFy\}$, то

$$\forall p_1, p_2 \in P\ :\ ({}^\bullet p_1 = {}^\bullet p_1) \wedge (p_1^\bullet = p_2^\bullet) \Rightarrow (p_1 = p_2).$$

- Графическим представлением сети служит двудольный ориентированный граф (в общем случае бесконечный) с двумя типами вершин; кружочки — это места, прямоугольники — это переходы. Из вершины x в вершину y ведет дуга, если и только если xFy.

Формальное определение сети Петри I

- *Сеть Петри* — это набор $N = (P, T, F, W, M_0)$, где (P, T, F) — конечная сеть (множество $X = P \cup T$ конечно), а $W : F \to \mathbf{N} \setminus \{0\}$ и $M_0 : P \to \mathbf{N}$ — две функции, называемые соответственно *кратностью дуг* и *начальной разметкой*.
- Сеть, в котрой все дуги имеет кратность 1 называется *ординарной*.
- Если предположить, что все места сети N строго упорядочены каким-либо образом, т.е. $P = (p_1, \ldots, p_n)$, то разметку M сети (в том числе начальную разметку) можно задать как вектор чисел $M = (m_1, \ldots, m_n)$ такой, что $\forall i, 1 \leq i \leq n, m_i = M(p_i)$.
- Если $P' = \{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}$ — подмножество мест из P, то условимся через $M(P')$ обозначать множество разметок $\{M(p_{i_1}), \ldots, M(p_{i_k})\}$.
- Если P' представить как вектор $P' = (p_{i_1}, \ldots, p_{i_k})$, то $M(P')$ обозначает вектор из множества N^k, называемый *проекцией* разметки M на P'.

Формальное определение сети Петри II

- На основе отношения инцидентности F и кратности дуг W введем *функцию инцидентности* $F : P \times T \cup T \times P \to \mathbf{N}$, которая определяется следующим образом

$$F(x,y) = \begin{cases} n, & \text{если } xFy \wedge (W(x,y) = n), \\ 0, & \text{если } \neg(xFy). \end{cases}$$

- Если места сети упорядочены, то можно каждому переходу t сопоставить два целочисленных вектора ${}^\bullet F(t)$ и $F^\bullet(t)$ длиной n, где $n = |P|$
${}^\bullet F(t) = (b_1, \ldots, b_n)$, где $b_i = F(p_i, t)$,
$F^\bullet(t) = (b_1, \ldots, b_n)$, где $b_i = F(t, p_i)$.
- Переход t *может сработать* при некоторой разметке M сети N, если $\forall p \in {}^\bullet t \; : \; M(p) \geq F(p,t)$, т.е. каждое входное место p перехода t имеет разметку, не меньшую, чем кратность дуги, соединяющей p и t. Это условие можно переписать в векторной формет $M \geq {}^\bullet F(t)$.

Формальное определение сети Петри III

- Срабатывание перехода t при разметке M порождает разметку M' по следующему правилу:
  $\forall p \in P \;\; : \;\; M'(p) = M(p) - F(p,t) + F(t,p)$, т.е.
  $M' = M - {}^{\bullet}F(t) + F^{\bullet}(t)$.
- Таким образом, срабатывание перехода t изменяет разметку так, что разметка каждого его входного места p уменьшается на $F(p,t)$, т.е. на кратность дуги, соединяющей p и t, а разметка каждого его выходного места увеличивается на $F(t,p)$, т.е. на кратность дуги, соединяющей t и p.
- На множестве разметок можно ввести отношение $[\rangle$ непосредственного следования разметок:
  $M[\rangle M' \Leftrightarrow \exists t \in T \;\; : \;\; (M \geq {}^{\bullet}F(t)) \wedge (M' = M - {}^{\bullet}(t) + F^{\bullet}(t))$.
- Будем использовать уточняющее обозначение $M[t\rangle M'$, если M' непосредственно следует после M в результате срабатывания перехода t.

Формальное определение сети Петри IV

- Говорят, что разметка M' достижима от разметки M, если существует последовательность разметок $M, M_1, M_2, \ldots, M'$ и слово $\tau = t_1 t_2 \ldots t_k$ в алфавите T такие, что $M[t_1\rangle M_1[t_2\rangle M_2 \ldots [t_k\rangle M'$.
- Слово τ в этом случае называется последовательностью срабатываний, ведущих от M к M'. Обощим отношение непосредственного следования до отношения "M' достижима от M", используя обозначение $M[\rangle M'$ или $M[\tau\rangle M'$, если уточняется последовательность срабатываний.
- Множество $\{M' \mid M[\rangle M'\}$ разметок, достижимых в сети N от разметки M, обозначим через $R(N, M)$.
- Множество $R(N) = R(N, M_0)$, т.е. множество всех разметок, достижимых в N от начальной разметки M_0, называют *множеством достижимых разметок* сети N. (Заметим, что $M \in R(N, M)$ и $M_0 \in R(N)$).

Формальное определение сети Петри V

- *Множеством последовательностей срабатываний* сети N, или *свободным языком* сети N, называется множество

$$L(N) = \{\tau \in T^* \mid \exists M \in R(N) : M_0[\tau\rangle M\},$$

т.е. множество всех последовательностей срабатываний, ведущих от M_0 к каждой достижимой в N разметке.

Пример сети Петри I

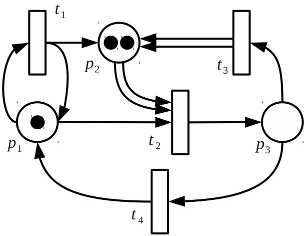
- Поясним данные выше определения на следующем примере
- В этой сети $P = \{p_1, p_2, p_3\}$, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- Функция инцидентности F задается с помощью следующих двух таблиц, в которых на пересечении строки x и столбца y стоит число $F(x, y)$:

	t_1	t_2	t_3	t_4
p_1	1	1	0	0
p_2	0	2	0	0
p_3	0	0	1	1

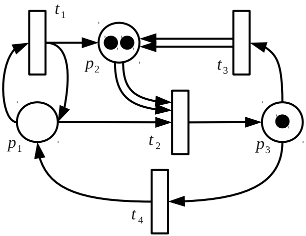
	p_1	p_2	p_3
t_1	1	1	0
t_2	0	0	1
t_3	0	2	0
t_4	1	0	0

- Начальная разметка M_0 задается следующим образом: $M_0(p_1) = 1, M_0(p_2) = 2, M_0(p_3) = 0$ или в векторной форме: $M = (1, 2, 0)$.
- При разметке M_0 могут сработать переходы t_1 и t_2, так как $M_0 = (1, 2, 0) \geq {}^\bullet F(t_1) = (1, 0, 0)$, $M_0 = (1, 2, 0) \geq {}^\bullet F(t_2) = (1, 2, 0)$. Переходы t_3 и t_4 не могут сработать, так как $M_0 \not\geq {}^\bullet F(t_4) = (0, 0, 1)$.

Пример сети Петри II



а)

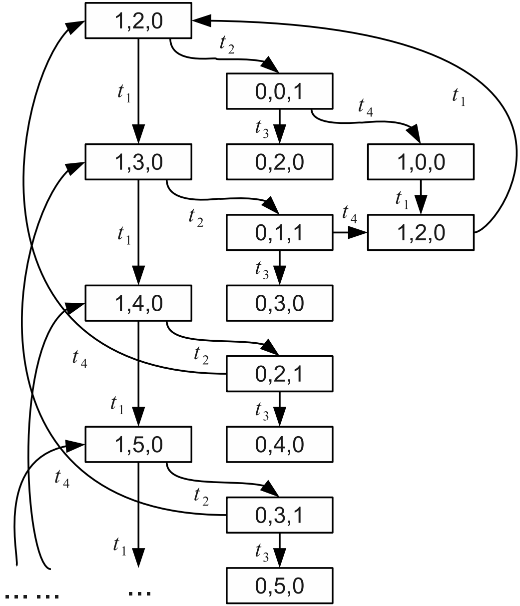


б)

Граф разметок I

- Возможные изменения разметок сети N, происходящие в результате срабатывания ее переходов, можно представить в виде *графа разметок* — ориентированного графа, множество вершин которого образовано множеством $R(N)$ достижимых в N разметок.
- Из вершины M в вершину M' ведет дуга, помеченная символом перехода t, если и только если $M[t\rangle M'$.
- Для расмотренной в примере сети построим граф разметок. Этот граф бесконечный, так как множество $R(N)$ этой сети — бесконечно.

Граф разметок II



Граф разметок III

- Разметка $M \in R(N)$ называется *тупиковой*, если в сети N не существует ни одного перехода, который может сработать при этой разметке.
- Для рассматриваемой сети тупиковыми являются разметки $(0,2,0),(0,3,0),(0,4,0),\ldots,(0,n,0),\ldots$
- Если выделить путь по дугам графа разметок, начинающийся в вершине M и заканчивающийся в вершине M', и выписать подряд все встречающиеся символы переходов, то полученное слово образует последовательность срабатываний, ведущих от M к M'.
- Множество всех слов, полученных выписыванием символов переходов вдоль путей, начинающихся в M_0, образует множество последовательностей срабатываний сети, или ее свободный язык.
- Язык рассматриваемой сети включает слова

$$\{\lambda, t_1, t_2, t_1t_1, t_1t_2, t_2t_3, t_2t_4, t_1t_1t_1, t_1t_1t_2, t_1t_2t_3, t_1t_2t_4,$$

$$t_2t_4t_1, t_1t_1t_1t_1, t_1t_1t_1t_2, t_1t_1t_2t_3, t_1t_1t_2t_4, t_1t_2t_4t_1, \ldots\}$$

Граф разметок IV

Theorem

Пусть $N = (P, T, F, W, M_0)$, $N' = (P, T, F, W, M_0 + K)$, *где* $K \in \mathbf{N}^{|P|}$. *Тогда*

- $M \in R(N) \Rightarrow (M + K) \in R(N')$;
- $L(N) \subseteq L(N')$;
- $M_1[\tau\rangle M_2 \Rightarrow (M_1 + K)[\tau\rangle(M_2 + K)$.