Теория вычислительных процессов и структур

Лекция №5. Логико-термальная эквивалентность стандартных схем

Содержание лекции

Для формализации доказательства ЛТ-экивалентнсоти двух схем потребуется понятие фрагмента схемы и преобразований фрагментов схемы.

Алгоритм определения ЛТ-эквивалентности будет свобдится к тому, что одна из двух взятых схем будет подвергаться некоторым преобразованиям с целью “получения” второй схемы. Таким образом, делается вывод об их ЛТ-эквивалентнсоти.

Для начала рассмотрим основные понятия, необходимые для построения этого алгоритма.

Часть 1. Фрагменты и их преобразование

Фрагменты

Фрагменты...

Понятие фрагмента является обобщением понятия схемы за исключением одной особенности: граф фрагмента, в отличие от графа схемы, может содержать свободные дуги (входы и выходы). Все входы и выходы фрагмента нумеруются натуральными числами таким образом, что:

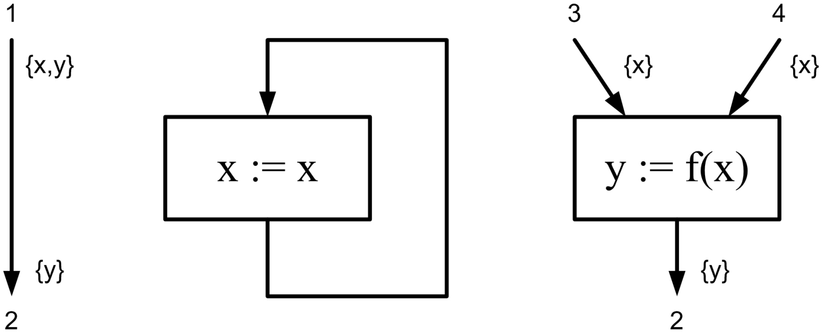
- номер каждого входа отличен от номеров всех остальных свободных дуг фрагмента;
- всякая висячая дуга получает два номера — номер входа и номер выхода.

Только такая нумерация свободных дуг называется *правильной* и будет использоваться далее.

...Фрагменты

Каждой свободной дуге фрагмента приписано некоторое конечное множество переменных, называемых *результатми входа* в случае входа, и *аргументами выхода* в случае выхода фрагмента. При этом выходы с одинаковыми номерами имеют одинаковые множества аргументов.
Оператор старт(x_1, x_2) вместе с выходящей из него дугой, если только он присутствует во фрагменте, условимся также считать входом фрагмента с номером 0 и приписанным ему множеством результатов $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
Тогда понятие схемы становится частным случаем понятия фрагмента.

Пример фрагмента



Условие эквивалентности фрагментов

Пусть Вх(G) означает множество номеров входов, а Вых(G) — множество номеров выходов фрагмента G.
Всякое отношение эквивалентности E, заданное для схем, можно теперь распространить на пары фрагментов G_1 и G_2, для которых

1. Вх$(G_1) =$ Вх(G_2);
2. Вх$(G_i) \cap$ Вых$(G_j) = \emptyset$ $(1 \leq i, j \leq 2, i \neq j)$;
3. выходы с одинаковыми номерами имеют одинаковые множества аргументов выхода.

Построение схемы из фрагмента

Для пары фрагментов G_1, G_2, удовлетворяющих этим условиям, зафиксируем какой-нибудь линейный порядок v на объединении множеств переменных, встречающихся в этих фрагментах, а также натуральное $n \notin \text{Вых}(G_1) \cup \text{Вых}(G_2)$. Пусть G — один из фрагментов пары G_1, G_2. По всяким натуральным $i \in \text{Вх}(G)$ и $j \in \text{Вых}(G_1) \cup \text{Вых}(G_2) \cup \{n\}$ построим схему $G^{(i,j)}$, которая получается из G следующим образом.

1. Из G удаляются все входы, кроме входа с номером i.
2. Все выходы с номерами, отличными от j, присоединяются к оператору петля (добавляется к G, если его еще нет).
3. Если $j \neq n$, то все заключительные операторы фрагмента заменются на операторы петля (ведущие к нему дуги остаются без изменений).
4. Если в G есть выход с номером j, то он присоединяется к добавляемому к G оператору стоп$(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_1, \ldots, y_k$ — аргументы входа с номером j в том порядке, который индицируется v.

Эквивалентность фрагментов

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только *правильных фрагментов* G, т.е. таких, что либо $\text{Вх}(G) = \emptyset$, либо для всех $i \in \text{Вх}(G)$ и для всех $j \in \text{Вых}(G) \cup \{n\}$ $G^{(i,j)}$ — правильная схема.

Напомним, что схема S называется *правильной*, если на каждой ее дуге e заданы все переменные из множестве $\text{арг}(\text{кон}(e))$, где $\text{кон}(e)$ — вершина, в которую входит дуга e, а $\text{арг}(v)$ — множество аргументов оператора, приписанного вершине v схемы.

При перечисленных условиях мы говорим, что фрагменты G_1 и G_2 *E-эквиваленты*, если схемы $G_1^{(i,j)}$ и $G_2^{(i,j)}$ E-эквивалентны для всех $i \in \text{Вх}(G_1)$ и для всех $j \in \text{Вых}(G_1) \cup \text{Вых}(G_2) \cup \{n\}$.

Заметим, что это определение объявляет эквивалентными (в любом смысле) всякие два фрагмента без входов и согласовано с определением функциональной эквивалентности схем.

Понятия пути, цепочки, термального значения терма на пути, а также лт-истории естественным образом переносятся на фрагменты.

Информационные маршруты, зацепленность и влияние

Информационный маршрут

Информационным маршрутом переменной x во фрагменте G называется всякий путь $w_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ такой, что

1. A_1 — вершина или вход с результатом x;
2. A_n — вершина или выход с аргументом x;
3. путь $A_2 \dots A_{n-1}$ не содержит ни одной вершины с результатом x.

При этом вершины, содрежащиеся в пути $A_2 \dots A_{n-1}$, называются *внутренними вершинами* этого *маршрута*. О каждой из дуг пути w говорят, что маршрут *проходит* по этой дуге.

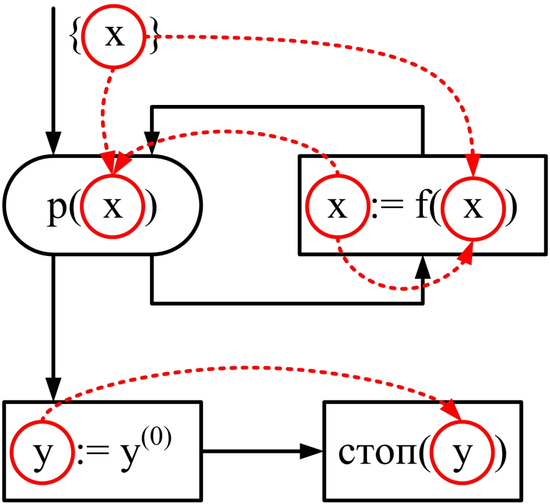
Процедура построения инф. графа

Опишем процедуру построения информационного графа заданного фрагмента G.

- Вершинами информационного графа являются результаты операторов и входов фрагмента G, а также аргументы операторов и выходов фрагмента G.
- Информационная дуга проводится от результата x оператора или входа A_1 к аргументу x оператора или выхода A_n тогда и только тогда, когда в G сущетвует маршрут $A_1 \dots A_n$ переменной x с началом A_1 и концом A_n.

Из наших опеределений следует, что все аргументы и результаты, принадлежащие одной и той же компоненте связности инфомрационного графа фрагмента, должны соответствовать одной переменной.

Пример информационного графа



Зацепленность и влияние

Две переменные фрагмента G *зацеплены*, если в G имеется хотя бы одна дуга, по которой проходят маршруты каждой из этих переменных. В пртивном случае переменные *не зацеплены* в G. Будем говорить, что *вершина* (или *результат входа*) A *влияет на вершину* (или *выход*) B фрагмента G, если выполнено одно из следующих условий:

1. A — преобразователь, и существует маршрут $A \ldots B$ некоторой переменной x во фрагменте G;
2. A — результат некоторого входа C, и существует маршрут $C \ldots B$ некоторой переменной x во фрагменте G;
3. существует некоторый преобразователь C такой, что A влияет на C, а C влияет на B.

Формальные преобразования

Вхождение фрагмента и его замена I

Вхождение фрагмента F во фрагмент G называется такая часть F' фрагмента G, которая вместе с каждой вершиной содержит и все инцидентные ей дуги, и для которой существует правильная нумерация свободных дуг, а также приписываемые этим дугам множества результатов входа и аргументов выхода, удовлетворяющие следующим требованиям:

1. при этой нумерации и расстановке множеств переменных F' образует фрагмент, совпадающий с F';
2. если свободная в F' дуга свободна и в G, то ее номер и приписываемые множества переменных совпадают с соответствующими в G;
3. все выходы в F', которые были внутренними в G, получают номера, отличные от номеров всех выходов в G;
4. если внутренняя дуга e фрагмента G является входом в F', то в качестве результатов входа ей приписываются все переменные, которые заданы для e в G;

Вхождение фрагмента и его замена II

5. если внутренняя дуга e фрагмента G является выходом в F', то в качестве аргументов выхода ей приписываются все переменные, маршруты которых проходят по дуге e в G;
6. все выходы в F', которые являются внутренними в G и имеют одинаковые номера, ведут к одной и той же вершине во фрагменте G.

Заменой вхождения фрагмента F_1 во фрагмент G фрагментом F_2 называется следующая операция: из G удаляется вхождение F_1, и каждая свободная дуга фрагмента F_2 (т.е. ее начало, если она входная, и/или ее конец, если она выходная) присоединяется к той вершине оставшейся части фрагмента G, к которой была присоединены дуга вхождения F_1 с тем же номером.

Система преобразований

Системой преобразований назовем конечный набор *схем правил*. Схема правил представляет собой описание некоторого множества пар фрагментов, называемых *равносильными*.

Правилом системы преобразований называется всякая пара фрагментов, которая порождается схемами правил этой системы. Правило (G_1, G_2) будет также записываться в виде $G_1 \leftrightarrow G_2$.

Применением правила (G_1, G_2) к фрагменту G называется замена вхождения одного из фрагментов пары G_1, G_2 во фрагменте G другим фрагментом этой пары.

Применение схемы правил состоит в применении любого из правил, порождаемых этой схемой правил.

Равносильность

Выводом равносильности $G_1 \overset{\Sigma}{\leftrightarrow} G_2$ в системе Σ называется последовательность фрагментов $F_1 = G_1, F_2, \ldots, F_n = G_2$ такая, что фрагмент F_{i+1} получается из фрагмента F_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ применением некоторой схемы правил из Σ. Отношение равносильности является очевидно рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Систему преобразований Σ назовем *полной* для отношения E-эквивалентности в классе схем K, если всякие E-эквивалентные схемы класса K являются Σ-равносильными.