Теория вычислительных процессов и структур

Лекция №3. Основные свойства схем программ

Содержание лекции

Эквивалентность и главные свойства стандартных схем

- Эквивалентность, тотальность, пустота, свобода
- Свободные интерпретации
- Согласованные свободные интерпретации
- Основные теоремы о свободных интерпретациях
- Определение логико-термальной эквивалентности и ее корректности

Свойства: тотальность, пустота, Ф-эквивалентность

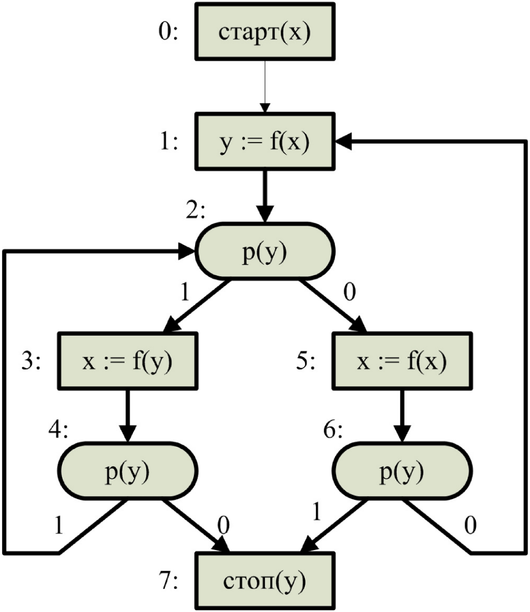
Стандартная *схема* S в базисе $\mathcal{B}$ *тотальна*, если для любой интерпретации I в базисе $\mathcal{B}$ программа (S, I) останавливается.

Стандартная *схема* S *пуста*, если для любой интерпретации I программа (S, I) зацикливается.

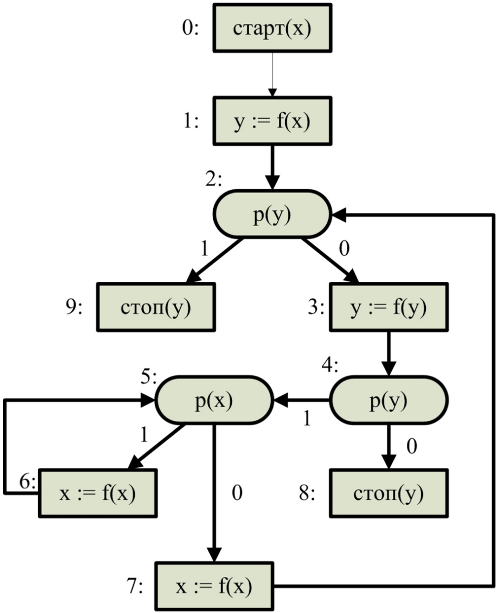
Говорят, что стандартные схемы S_1 и S_2 в базисе $\mathcal{B}$ *функционально-эквивалентны* ($S_1 \sim S_2$), если для любой интерпретации I базиса $\mathcal{B}$ программы (S_1, I) и (S_2, I) либо обе зацикливаются, либо обе останавливаются с одинаковым результатом, т.е. $val(S_1, I) \simeq val(S_2, I)$. Если схемы в разных базисах ($\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$), то их можно привести к одному базису, взяв объединение $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$.

Рассмотрим примеры схем.

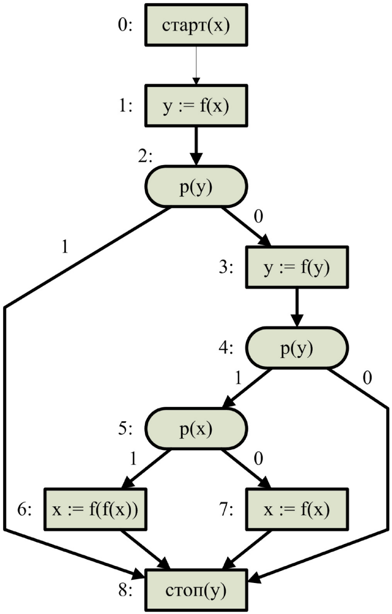
Пример пустой схемы $S_{4.3}$



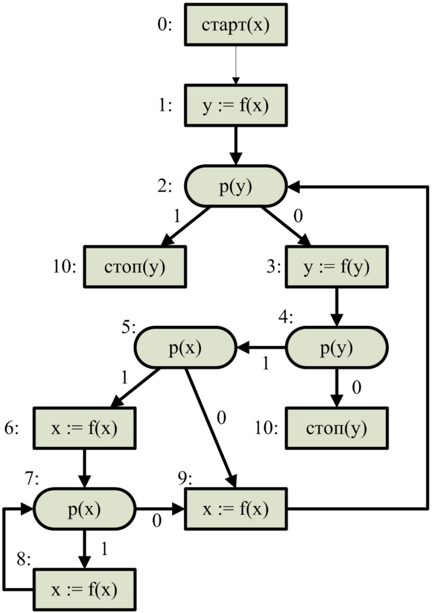
Пример тотальной схемы $S_{4.4}$



Пример тотальной схемы $S_{4.5}$



Пример тотальной схемы $S_{4.6}$



Эквивалентность схем в примерах

Для схем $S_{4.4}$, $S_{4.5}$ и $S_{4.6}$ справедливы следующие соотношения

$$S_{4.4} \sim S_{4.6}, S_{4.5} \not\sim S_{4.4}, S_{4.5} \not\sim S_{4.6}$$

Цепочка стандартной схемы

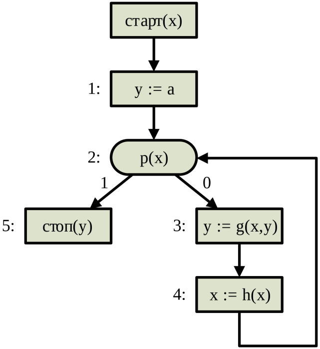
Цепочкой стандартной схемы называется:

1. конечный путь по вершинам схемы, ведущий от начальной вершины к заключительной
2. или бесконечный путь по вершинам, начинающийся начальной вершиной схемы.

Условимся: если вершина v — распознаватель, то будем снабжать метку вершины верхним индексом 0 или 1 (без скобок), обозначая, по какой дуге идет дальше построение цепочки.

Примеры цепочек

Примеры цепочек для схемы $S_{4.2}$:

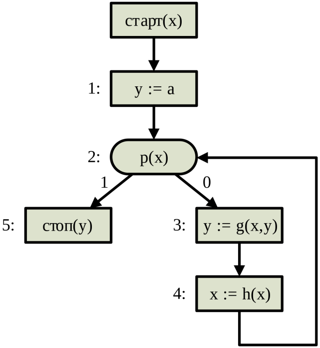


$(0, 1, 2^1, 5)$
$(0, 1, 2^0, 3, 4, 2^0, 3, 4, 2^1, 5)$
$(0, 1, 2^0, 3, 4, 2^0, \dots, 2^0, \dots)$

Цепочка операторов стандартной схемы

Цепочкой операторов назовем последовательность операторов, метящих вершины некоторой цепочки схемы.

Примеры для схемы $S_{4.2}$



$$(\text{старт}(x), y := a, p^1(x), \text{стоп}(y))$$

$$(\text{старт}(x), y := a, p^0(x), y := g(x, y), x := h(x), p^0(x),$$
$$y := g(x, y), x := h)(x), p^0(x), \dots)$$

Свойства: свобода

Пусть S — стандартная схема в базисе $\mathcal{B}$, I — некоторая интерпретация базиса $\mathcal{B}$, $(0, 1, k_2, k_3, \dots)$ —- последовательность меток инструкций схемы S, выписанных в том порядке, в котором эти метки входят в конфигурацию протокола выполнения программы (S, I) (т.е. это цепочка схемы S).

Будем говорить, что интерпретация I *подтверждает* (или *порождает*) эту цепочку. А цепочку стандартной схемы в базисе $\mathcal{B}$ назовем *допустимой*, если она подтверждается хотя бы одной интерпретацией этого базиса.

Стандартная схема *свободна*, если все ее цепочки допустимы.

Допустимая цепочка операторов — это цепочка операторов, соответствующая допустимой цепочке схемы.

В тотальной схеме все допустимые цепочки (допустимые цепочки операторов) конечны, в пустой схеме все допустимые цепочки (и допустимые цепочки операторов) бесконечны.

Свободная интерпретация

Отношение функциональной эквивалентности, а также свойства тотальности и пустоты стандартных схем, определены с использованием понятия множества всех возможных интерпретаций базиса. Таким образом, для установления этих свойств схем необходимо это сделать для все интерпретаций. Такой путь крайне не перспективен, так как класс всех возможных интерпретаций базиса крайне широк.

Однако, существует подкласс интерпретаций, называемых *свободными*, позволяющий установить справедливость свойств стандартны схем.

Свободная интерпретация: определение

Все свободные интерпретации базиса $\mathcal{B}$ имеют одну и ту же область интерпретации, которая совпадает с множеством T всех термов базиса $\mathcal{B}$:

1. для любой переменной x из базиса $\mathcal{B}$ и для любой свободной интерпретации I_h этого базиса $I_h(x) = x$;
2. для любой константы $I_h(a) = a$;
3. для любого функционального символа $f^{(n)}$ из базиса $\mathcal{B}$, где $n \geq 1$, $I_h(f^{(n)}) = F^{(n)} : T^n \to T$, где $F^{(n)}$ словарная функция такая, что $F^{(n)}(\tau_1, \ldots, \tau_n) = f^{(n)}(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, т.е. функция $F^{(n)}$ по термам $\tau_1, \ldots, \tau_n$ из T строит новый терм, используя функциональный символ $f^{(n)}$;
4. интерпретация предикатных символов полностью "свободна": произвольный предикат, отображающий T в $\{0, 1\}$; различные свободные интерпретации отличаются лишь интерпретацией предикатных символов.

Как видно, при свободных интерпретациях термы могут использоваться в двух значениях: как функциональные выражения в схемах и как значения переменных и выражений. Последние будут заключаться в одинарные кавычки, чтобы избегать путаницы.

Свободная интерпретация: пример I

Пусть определена I_h свободная интерпретация схемы $S_{4.2}$ и в этой интерпретации предикат $P = I_h(p)$ задан следующим образом:

$$P(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если число функциональных символов в } \tau \text{ больше 2;} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Тогда протокол программы $(S_{4.2}, I_h)$ можно представить

конф-ия	метка	Значения	
		x	y
u_0	0	$'x'$	$'y'$
u_1	1	$'x'$	$'a'$
u_2	2	$'x'$	$'a'$
u_3	3	$'x'$	$'g(x,a)'$
u_4	4	$'h(x)'$	$'g(x,a)'$
u_5	2	$'h(x)'$	$'g(x,a)'$
u_6	3	$'h(x)'$	$'g(h(x),g(x,a))'$
u_7	4	$'h(h(x))'$	$'g(h(x),g(x,a))'$
u_8	2	$'h(h(x))'$	$'g(h(x),g(x,a))'$
u_9	3	$'h(h(x))'$	$'g(h(h(x)),g(h(x),g(x,a)))'$
u_{10}	4	$'h(h(h(x)))'$	$'g(h(h(x)),g(h(x),g(x,a)))'$
u_{11}	2	$'h(h(h(x)))'$	$'g(h(h(x)),g(h(x),g(x,a)))'$
u_{12}	5	$'h(h(h(x)))'$	$'g(h(h(x)),g(h(x),g(x,a)))'$

Свободная интерпретация: пример II

Можно отметить, что зная местность функционального символа, можно убирать скобки и восстанавливать исходное значение терма. Назовем такую форму представления бесскобочной. Пример

$$g^{(2)}(h^{(1)}(x), g^{(2)}(x, y)) \to ghxgxy$$

Согласованные свободные интерпретации: определение

Будем говорить, что интерпретация I и свободная интерпретация I_h того же базиса $\mathcal{B}$ *согласованы*, если для любого логического выражения π справедливо $I_h(\pi) = I(\pi)$.

Лемма 1

Для каждой интерпретации I базиса $\mathcal{B}$ существует согласованная с ней свободная интерпретация этого базиса.

Пример согласования интерпретаций

Например для схемы $S_{4.2}$ I_h из примера выше согласована с I_2 из предыдущей лекции.
Напомним I_2:

- область интерпретации $D_2 = V^*$, где $V = \{a, b, c\}$;
- $I_2(x) = abc$, $I_1(y) = \epsilon$ (пустое слово), $I_1(a) = \epsilon$;
- $I_2(g) = CONSCAR$, где $CONSCAR : D_2^2 \to D_2$,

$$CONSCAR(d\delta, \gamma) = d\gamma, d \in V, \delta \in V^*, \gamma \in V^*$$

- $I_2(h) = CDR$, где $CDR : D_2 \to D_2$

$$CDR(d\delta) = \delta, d \in V, \delta \in V^*$$

- $I_2(p) = P_2$, где $P_2 : D_2 \to \{0, 1\}$ — предикат “равно ϵ?”, т.е.

$$P_1(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \epsilon, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \epsilon \end{cases}$$

Программа $(S_{4.2}, I_2)$ преобразует слово abc в слово cba.

Подстановка термов

Введем понятие *подстановки термов*. Если $x_1, \dots, x_n$, $(n \geq 0)$ — попарно различные переменные, $\tau_1, \dots, \tau_n$ — термы из T, а π — функциональное или логическое выражение, то через $\pi[\tau_1/x_1, \dots, \tau_n/x_n]$ будем обозначать выражение, получающееся из выражения π одновременной заменой каждого из вхождений переменной x_i на терм τ_i $(i = 1, \dots, n)$ или более формально:

1. Для $i = 1, \dots, n$, $x_i[\tau_1/x_1, \dots, \tau_n/x_n] = \tau_i$;
2. Если $n = 0$ или выражение π не содержит вхождений переменных $x_1, \dots, x_n$, то $\pi[\tau_1/x_1, \dots, \tau_n/x_n] = \pi$;
3. Если $\pi = g(t_1, \dots, t_k)$, где g — функциональный или предикатный символ, $t_1, \dots, t_k \in T$, $k \geq 0$, то

$$\pi[\tau_1/x_1, \dots, \tau_n/x_n] = g(t_1[\tau_1/x_1, \dots, \tau_n/x_n], \dots, t_k[\tau_1/x_1, \dots, \tau_n/x_n])$$

Примеры $a[y/x] = a, f(x, y)[y/x, x/y] = f(y, x), g(x)[g(x)/x] = g(g(x)), p(x)[a/x] = p(a)$

Лемма 2

Пусть I — произвольная интерпретация базиса $\mathcal{B}$, W — состояние памяти такое, что для всех x, $W(x) \in T$. Пусть далее π — произвольное выражение, $x_1, \ldots, x_n$ — все его переменные, а W' — состояние памяти такое, что для всех x $W'(x) = I(W(x))$. Тогда

$$\pi_I(W') = I(\pi[W(x_1)/x_1, \ldots, W(x_n)/x_n]).$$

Доказательство.

Легко проводится индукцией по глубине выражения.
Глубина выражения

$$\text{глубина}(\tau) = \begin{cases} 0, \\ 1 + max(\text{глубина}(\tau_1) \ldots \text{глубина}(\tau_1)), \end{cases}$$

Равно 0, если τ является переменной или константой, и равно $1 + \ldots$, если $\tau = g(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, где $\tau_1, \ldots, \tau_n \in T$, а g — функциональный или предикатный символ. $\square$

Леммы о свободных интерпретациях

Лемма 3

Пусть S — стандратная схема в базисе $\mathcal{B}$, I — интерпретация, а I_h — согласованная с I свободная интерпретация этого базиса. Тогда для любой пары конфигурацией $u_i = (k_i, W_i)$ и $u_i' = (k_i', W_i')$ такой, что u_i — i-ая конфигурация протокола выполнения программы (S, I_h), а u_i' — i-ая конфигурация протокола выполнения программы (S, I), выполнено $k_i = k_i'$ и для всех $x \in X_s$

$$W_i'(x) = I(W_i(x))$$

Лемма 4

Если интерпретаци I и свободная интерпретация I_h согласованы, то программы (S, I) и (S, I_h) либо обе зацикливаются, либо обе останавливаются и $I(val(S, I_h)) = val(S, I)$.

Лемма 5

Если интерпретация I и свбодная интерпретация I_h согласованы, то они порождают одну и ту же цепочку (цепочку опреторов) схемы.

Ф-эквивалентность

Теорема 6

Стандартные схемы S_1 и S_2 в базисе $\mathcal{B}$ функционально эквиваленты тогда и только тогда, когда они функционально эквивалентны на множестве всех свободных интерпретаций базиса $\mathcal{B}$, т.е. когда для любой свободной интерпретации I программы (S_1, I) и (S_2, I) либо обе зацикливаются, либо обе останавливаются и $val(S_1, I) = val(S_2, I)$.

Пустота и тотальность

Теорема 7

Стандартная схема S в базисе $\mathcal{B}$ пуста (тотальна) на множестве всех свободных интерпретаций этого базиса, если для любой свободной интерпретации I_h программы (S, I_h) зацикливается (останавливается).

Свобода

Теорема 8

Стандартная схема S в базисе $\mathcal{B}$ свободна тогда и только тогда, когда она свободна на множестве всех свободных интерпретаций этого базиса, т.е. когда каждая цепочка схемы подтверждается хотя бы одной свободной интерпретацией.

Эквивалентности схем

Отношение эквивалентности E, заданное на парах стандартных схем, назовем *корректным*, если для любой пары схем S_1 и S_2 из $S_1 \stackrel{E}{\sim} S_2$ следует, что $S_1 \sim S_2$ (S_1 и S_2 функционально эквивалентны).

Поиск таких корректных эквивалентностей связан с невозможностью определять функциональную эквивалентность для множества схем.

Определим *термальное значение переменной* x *для некоторого пути* w схемы S как терм $t(w,x)$, который строится следующим образом:

1. Если путь w содержит только один оператор A, то

$$t(w,x) = \begin{cases} \tau, & \text{если } A \text{ — оператор присваивания } x := \tau \\ x, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

2. Если $w = w'Ae$, где A — оператор, e — выходящая из него дуга, w' — непустой путь, ведущий в A, а $x_1 \ldots, x_n$ — все переменные терма $t(Ae,x)$, то

$$t(w,x) = t(Ae,x)[t(w',x_1)/x_1, \ldots, t(w',x_n)/x_n].$$

Понятие термального значения распространим на произвольные термы τ: если $x_1, \ldots, x_n$ — все переменные терма τ, то положим

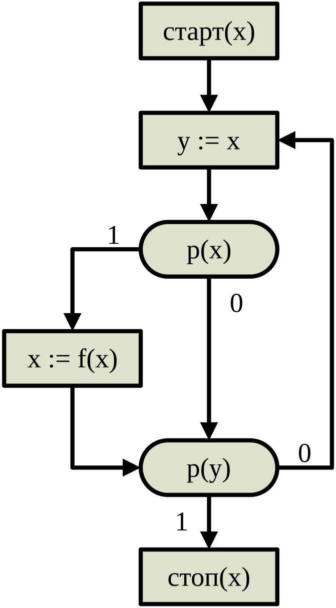
$$t(w,\tau) = \tau[t(w,x_1)/x_1, \ldots, t(w,x_n)/x_n].$$

Например для пути

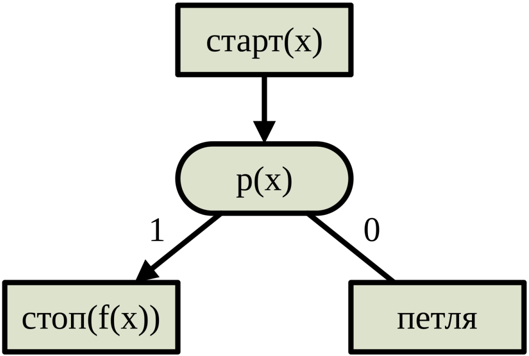
$$\text{старт}(x); y := x; p^1(x); x := f(x); p^0(y); y := x; p^1(x); x := f(x)$$

переменной x соответствует термальное значение $f(f(x))$.

Пример схемы S_a



Пример схемы S_b



Логико-термальная история

Для пути w в некоторой стандартной схеме S определим ее *логико-термальную историю* $lt(S, w)$ как слово, которое строится следующим образом:

1. Если путь w не содержит распознавателей и заключительной вершины, то $lt(S, w)$ — пустое слово.
2. Если $w = w've$ где v — распознаватель с тестом $p(\tau_1, \dots, \tau_k)$, а e — выходящая из него Δ-дуга, $\Delta \in \{0, 1\}$, то

$$lt(S, w) = lt(S, w')p^{\Delta}(t(w', \tau_1), \dots, t(w', \tau_k))$$

3. если $w = w'v$, где v — заключительная вершина с оператором стоп$(\tau_1, \dots, \tau_k)$, то

$$lt(S, w) = lt(S, w')t(w', \tau_1) \dots t(w', \tau_1) \dots t(w', \tau_k).$$

Например для пути указанного выше логико-термальная история будет

$$p^1(x)p^0(x)p^1(f(x))$$

ЛТ-эквивалентность

Детерминантом ($det(S)$) стандартной схема S называется множество логико-термальных историй всех ее цепочек, завершающихся заключительным оператором.

Схемы S_1 и S_2 называются *логико-термально эквивалентными* (сокращено ЛТ-эквивалентными) $S_1 \overset{\text{ЛТ}}{\sim} S_2$, если их детерминанты совпадают.

Лемма 9

ЛТ-эквивалентность корректна, т.е.

$$S_1 \overset{ЛТ}{\sim} S_2 \Rightarrow S_1 \sim S_2$$

Следует отметить, что обратное утверждение в общем случае неверно. Например, схема S_b на слайдах выше не ЛТ-эквивалентна схеме S_a. Можно сказать, что ЛТ-эквивалентность допускает меньше сохраняющих ее преобразований, чем функциональная эквивалентность.